

# Modélisation et réalité : la rencontre des mathématiques et des sciences

par Guy Gervais, Académie les Estacades  
avec la collaboration de Ghislain Samson, Université de Sherbrooke

## Résumé

Dans cet article, nous exposons un exemple d'une activité réalisée avec des élèves de deuxième cycle du secondaire permettant de développer la compétence mathématique « Résoudre une situation-problème » tout en passant par chacune des étapes de la démarche scientifique. Cette activité amène les élèves à développer le concept de modélisation, et permet à l'enseignant d'observer à quel point une activité fort simple peut être extrêmement riche tant au plan pédagogique qu'au niveau didactique tout en intégrant les mathématiques et les sciences. Le lecteur est invité à noter la grande différence au niveau de l'approche de l'étude des fonctions dans le nouveau programme de mathématique au deuxième cycle du secondaire (MELS, 2007) par rapport aux anciens des années 1990.

## Introduction

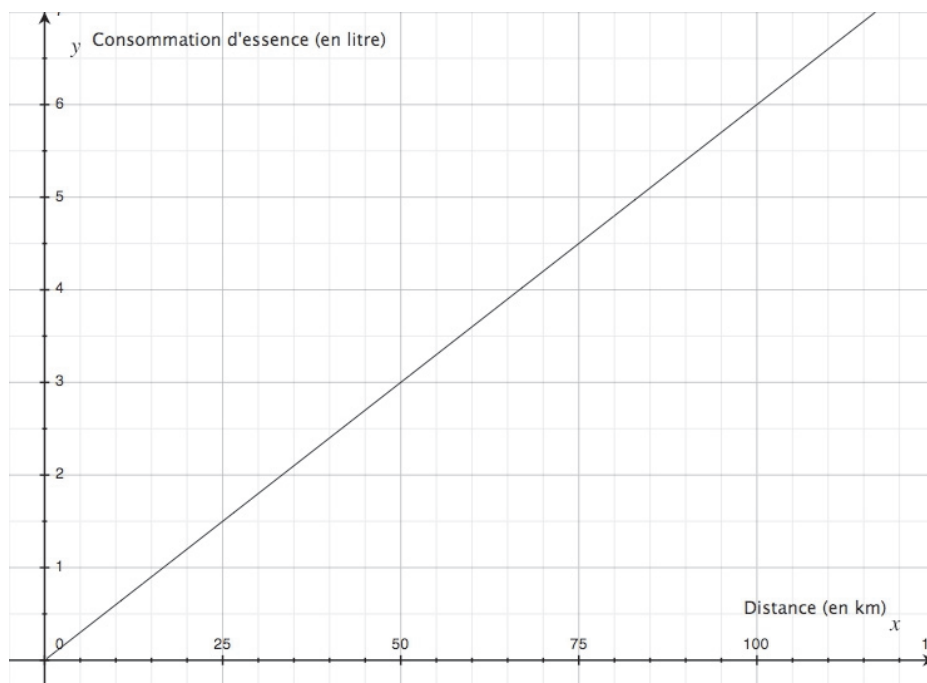
Est-ce que la réalité existe vraiment? Peut-on décrire cette réalité? Peut-on la décrire avec exactitude? Pour étudier un phénomène physique, il arrive qu'une mathématisation soit nécessaire. En physique par exemple, il peut s'agir d'analyser la trajectoire d'un ballon lancé dans les airs et de l'associer à une parabole, mais la description de la parabole sera d'abord et avant tout de nature mathématique (modélisation). Très difficile de dissocier les maths et les sciences!

## Problématique

Couramment, un modèle se confond avec la réalité. On prend pour acquis qu'un modèle devient la réalité et qu'il décrit parfaitement un phénomène dans toute son amplitude et dans toutes ses particularités. Par exemple, voyons graphiquement la consommation d'essence d'une voiture par rapport à la distance parcourue. Si une voiture consomme six litres par cent kilomètres, alors nous obtiendrons la représentation graphique ci-contre.

Cette représentation graphique est-elle réaliste? En regard du programme de mathématiques, oui, mais pas du tout en regard de la réalité! Cette situation ne représente qu'un cas très particulier, soit celui d'une voiture se déplaçant à

Figure 1. Graphique de la consommation d'essence en fonction de la distance parcourue



une vitesse constante sur une route parfaitement droite et sans aucune bosse ou trou qui pourrait la ralentir et modifier la consommation qui semble ici être tout à fait constante. Cependant, ce modèle peut être utile pour comparer la consommation de différentes voitures ou pour faire des prévisions. Le problème reste celui de la représentation graphique, à savoir une courbe parfaite

qui décrit bien la situation, mais on oublie qu'elle n'existe pas dans la réalité! Dans les anciens (mais encore en vigueur au moment d'écrire l'article) programmes de mathématiques (MEQ, 1995 ; 1996a et b ; 1997a et b), cette façon d'aborder les fonctions pouvait amener l'élève à cette perception que tout phénomène physique répond à des lois précises, exactes et immuables.

## Qu'est-ce que la modélisation<sup>1</sup> ?

Un modèle mathématique est une équation ou un ensemble d'équations décrivant le mieux possible le phénomène qu'il représente. Ce modèle servira ensuite pour décrire tout phénomène comparable dans son ensemble et permettra aussi de faire des prédictions (interpolation, extrapolation). On doit d'abord observer un phénomène, créer un modèle qui le reproduit le plus fidèlement possible, déterminer les limites de ce modèle et finalement le valider (en météorologie, par exemple). Cette démarche de modélisation<sup>2</sup> mathématique correspond bien aux étapes de la démarche scientifique du programme de sciences et technologies (Observation, analyse, hypothèse, validation) :

L'étude des fonctions constitue un aspect important du processus de modélisation. La représentation graphique d'une expérimentation amène l'élève à constater que les données recueillies ne forment pas toujours une courbe qui correspond exactement à un modèle mathématique, en raison notamment d'erreurs de manipulation, de mesure ou du degré de précision de l'instrument utilisé. Lors d'expérimentations se rapportant à la fonction polynomiale de degré 1 ou rationnelle, il associe la courbe la mieux ajustée au nuage de points obtenu et effectue des interpolations ou des extrapolations. (MELS, Chapitre 6, Programme de mathématique 2007, p. 56)

Qui plus est, la mathématique présente un corps de connaissances utiles à la science et à la technologie. Par exemple :

Dans la conception d'objets techniques ou de systèmes technologiques, la mathématique est souvent utile notamment pour aider les élèves à modéliser les relations qui existent entre certaines variables déterminantes. De plus, par le vocabulaire, le graphisme, la notation et les symboles auxquels elle recourt, la mathématique offre un langage rigoureux dont peuvent tirer profit la science et la technologie. D'autre part, la mathématique sollicite le développement de compétences sur le raisonnement, la résolution de problème et la communication, qui représentent une parenté avec celles qui sont au cœur du programme de science et

technologie. (MELS 2007, Chapitre 6, Programme de Science et technologie, p. 6)

Voilà pour le devis ministériel, mais que faire en classe ?

## Activité avec la calculatrice et une sonde

Voici une activité très simple à faire avec les élèves, mais qui peut amener de nombreuses discussions sur la représentation d'un phénomène physique à l'aide d'un modèle « adéquat ».

Le but de l'activité consiste à déterminer l'équation de la température d'un corps qui se refroidit en fonction du temps.

Avant de commencer l'expérimentation comme telle, il importe de demander aux élèves de construire un graphique de la température en fonction du temps d'un corps qui se refroidit après qu'on l'eut réchauffé entre nos mains, un bout de métal par exemple. Le graphique doit simplement représenter l'allure générale de la courbe qui caractériserait le comportement de ce corps qui se refroidit. Réalisons ensuite l'expérience suivante :



Dans cette expérimentation, nous utilisons une calculatrice à affichage graphique (TI-83 ou TI-84 de *Texas Instrument*) et une sonde à température (*USB EasyTEMP sensor*, de Vernier branchée à celle-ci (on pourrait aussi faire la collecte de données « à la main »). En voici les principales étapes :

1. Branchez la sonde à température dans la calculatrice.

2. Prenez la sonde entre vos mains et tenez-la pendant quelques minutes ou jusqu'à ce que la température se stabilise.
3. Déposez la sonde sur la table et commencez à noter la température à intervalles de deux secondes pendant 180 secondes.
4. Construisez le graphique de la température en fonction du temps.

## Questionnement sur le résultat obtenu

5. Le graphique obtenu correspond-t-il à celui attendu ?
6. Déterminez une équation correspondant le mieux possible à ce phénomène.
7. Cette équation est-elle un bon « modèle » pour décrire le refroidissement d'un corps ? Pourquoi ?
8. Quel est le type de cette équation (second degré, droite, exponentielle...)?
9. Y a-t-il d'autres équations possibles ?
10. À quel moment la température atteindra-t-elle zéro degré Celsius ?
11. Ce modèle est-il valable pour un autre corps, comme de l'eau ?
12. Ce modèle serait-t-il encore valable pour de l'eau portée à ébullition par exemple ?
13. Tentez de modifier votre modèle pour qu'il corresponde à la question 8.
14. Est-il « normal » d'avoir plusieurs modèles possibles ? Pourquoi ?

Cette activité fut réalisée avec des élèves de quatrième secondaire dans le cours de mathématique. Contrairement à ce que l'on pourrait penser, les résultats étaient souvent meilleurs avec les élèves plus faibles. Nous croyons que la différence est au niveau de l'ouverture d'esprit de ces élèves et de la difficulté pour les élèves plus forts à trouver « LA » bonne réponse. Devant le fait

qu'il peut y avoir plusieurs réponses variables, ceux-ci font souvent un constat d'échec. Ils remettent en question les connaissances acquises et sont toujours insatisfaits du résultat qu'ils considèrent comme flou, c'est-à-dire partiellement faux. Cette activité fut répétée avec des enseignants de mathématique lors d'un colloque et le résultat fut semblable (Gervais, 2005). Plusieurs enseignants cherchaient « LA » bonne courbe et s'acharnaient à trouver celle qui collait le mieux à la réalité sans vraiment être totalement satisfaits. Certains étaient convaincus qu'ils allaient trouver cette courbe parfaite, comme si le phénomène répondait à une loi mathématique. Évidemment les enseignants parvenaient à des résultats nettement supérieurs aux élèves dus à leur maîtrise des paramètres des fonctions, mais en ayant toujours un doute à l'esprit concernant la validité de leurs résultats.

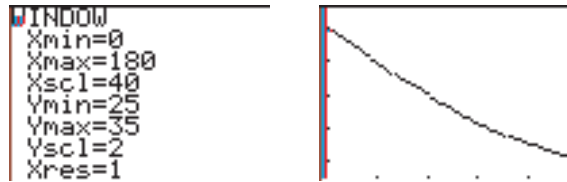
Avec les deux exemples précédents, nous pouvons maintenant poser la question : qu'est-ce qu'un « bon modèle » et quelles en sont les caractéristiques ou les qualités ?

## Qualités d'un bon modèle

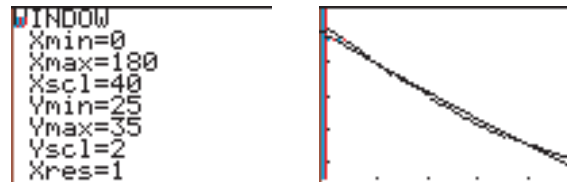
Un modèle mathématique doit évidemment servir à décrire un phénomène, mais il peut aussi être simple, perfectible et suffisamment précis pour un domaine donné tout en demeurant reproductible. C'est ici que le problème ou le défi devient intéressant. Doit-on privilégier un modèle simple mais peu précis ou complexe et précis ? En fait la réponse est, pensons-nous, un peu des deux ! Un modèle doit être simple et précis, mais pour un domaine donné. Par exemple, la découverte de l'atome et de ses composantes ou la découverte du comportement des galaxies ont démontré que les lois de Newton sur le mouvement des corps étaient fausses dans les limites de l'excessivement grand et de l'excessivement petit. Il a fallu attendre Einstein pour avoir des modèles réalistes et efficaces dans ces ordres de grandeur. Pourtant, la NASA utilise toujours les lois de Newton pour lancer sa navette spatiale !

Voici un exemple intéressant obtenu avec la même activité, mais en utilisant la fonction automatique de corrélation de la calculatrice :

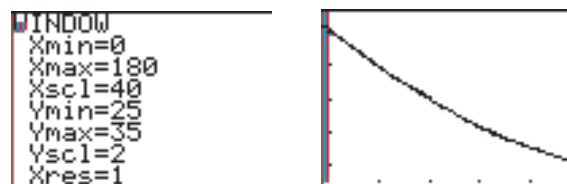
Le petit encadré de gauche nous donne les dimensions de la fenêtre d'affichage, alors que celui de droite nous expose le nuage de points obtenus.



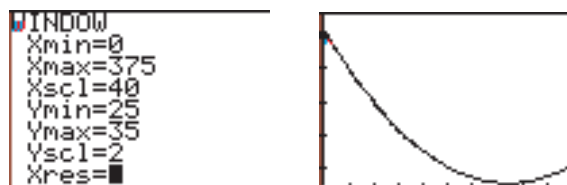
Si l'on cherche l'équation exponentielle la mieux ajustée (régression exponentielle) voici ce que l'on obtient :



Puis l'équation quadratique la mieux ajustée (régression quadratique) voici ce que l'on obtient :



On constate alors qu'une fonction exponentielle correspond nettement mieux à notre phénomène de refroidissement, mais observons ce qui se passerait un peu plus loin...



Cette courbe n'a aucun sens au-delà d'une certaine limite ! Selon ce modèle, après un certain temps on obtiendrait une augmentation de la température ! Un modèle basé sur une équation exponentielle correspond mieux au phénomène à l'intérieur du domaine étudié (interpolation), mais devient « totalement faux » à l'extérieur de domaine (extrapolation).

Un modèle peut-il être bon même s'il ne couvre pas toutes les situations connues ? Il se peut que plusieurs modèles soient adéquats. Il est très intéressant ici de faire cette discussion avec les élèves. Tout ce travail aura pour effet de bien faire comprendre la complexité que peut amener la description d'un phénomène simple et que nos mo-

dèles décrivent une partie de la réalité seulement. Enfin, cette activité nous permet de mener à bien une démarche à caractère scientifique où la rigueur est de mise.

## La modélisation, processus mathématique qui répond aux éléments de rigueur scientifiques

Les étapes « classiques » de la démarche scientifique sont : l'observation ; l'hypothèse ; l'expérimentation ; le traitement de données (incluant les résultats et l'interprétation) et la conclusion (OHERIC). Toutes ces étapes se retrouvent dans la démarche de modélisation. L'observation : observation du phénomène de refroidissement d'un corps.

L'hypothèse: formulation d'une équation qui pourrait décrire ce phénomène. L'expérimentation: collecte de données. Traitement de données: analyse des données et représentation graphique. Conclusion: formulation d'un modèle correspondant au phénomène observé ou étudié. Nous pensons toutefois, tout comme Hasni et Samson (à paraître, a et b), que cette démarche scientifique comporte des étapes sans qu'elles soient linéaires telles que présentées dans le modèle OHERIC.

Une activité (avec des élèves ou des enseignants) comme celle que nous venons de présenter a pour but de développer des habilités d'observation<sup>3</sup> et d'analyse qui permettront à l'élève de mener à bien une démarche complète en résolution de problèmes. La richesse d'une telle activité est qu'elle peut donner lieu à plusieurs modèles différents, mais tous valables en plus de pouvoir se vivre à n'importe quel moment de l'année ou du cycle. À la fin du deuxième cycle du secondaire, les modèles seront probablement plus complexes, mais cela sera simplement un reflet de la réalité pour tout modèle élaboré par les scientifiques à travers l'histoire des mathématiques et des sciences. Étant donné le lien entre les compétences en mathématique et en science et technologie, cette activité pourrait se vivre indépendamment dans un cours, comme dans l'autre.

## La modélisation, processus mathématique qui répondra à la démarche de résolution de problèmes

Au niveau de la mathématique, construire un modèle demande une compréhension globale du problème, l'élève doit voir la situation dans son ensemble. Que ce soit dans un contexte scientifique ou purement mathématique,

... la résolution d'une situation-problème est un processus dynamique qui nécessite de nombreux allers-retours et fait appel à l'anticipation, au discernement et au jugement critique. Le développement et l'exercice de cette compétence exigent de l'élève qu'il décode les éléments qui se prêtent à un traitement mathématique, qu'il représente la situation-problème par un modèle mathématique, qu'il élabore une solution mathématique, qu'il valide cette solu-

tion tout au long du processus et qu'il échange l'information relative à la situation-problème et à la solution proposée. Pour ce faire, il doit s'appuyer sur ses acquis et recourir à son imagination et à sa curiosité (MELS, Chapitre 6, Programme de mathématique, 2007, p. 19).

Un des problèmes en mathématique au secondaire est la peur du « peut-être » ou d'admettre qu'il y a plus d'une réponse possible. Si on calcule une température<sup>4</sup> à partir d'une formule mathématique, on s'attend à une réponse précise et exacte dans tous les cas et ce, peu importe les conditions. Nous avons tendance à croire que tout ce qui est dans la nature répond à des formules immuables et que les phénomènes physiques sont les conséquences de formules mathématiques. Cette peur du « peut-être » nous prive, pensons-nous, d'activités riches en questionnement et en raisonnement et rend les mathématiques peu concrètes. Cette analyse du « peut-être » permettra entre autres de développer une compétence fort importante en mathématique et trop peu développée jusqu'à maintenant dans nos programmes, soit celle de la résolution de problèmes. L'analyse globale de la situation oblige l'élève à construire une démarche et à faire des « allers et retours » lors de la modélisation et de la validation. L'application d'une formule toute faite ou l'application d'une « recette » est impossible. La démarche en résolution de problèmes est complète et incontournable dans tout processus de modélisation et peut amener les élèves sur différentes pistes de solution qui sont toutes aussi valables les unes que les autres.

Ainsi, il exploite différentes stratégies, comme la recherche de régularités ou le recours à des essais systématiques ou dirigés, lorsqu'il explore des pistes de solution visant à dégager un modèle. Il fait appel aux concepts d'équation, de fonction et de système dans l'élaboration d'une solution où l'abstraction, l'interpolation, l'extrapolation, l'optimisation, la prise de décisions et le choix d'options sont nécessaires pour mener à bien la tâche. (MELS, Chapitre 6, Programme de mathématique, 2007, p. 20)

## Discussion

Une des grandes améliorations dans le nouveau programme de mathématique du deuxième cycle du secondaire (MELS, 2007) est l'étude des fonctions dont l'approche est radicalement différente. On ne commence plus l'étude des fonctions en décrivant celles-ci à l'aide de courbes et en tentant de les « coller » à certains phénomènes de la vie courante, mais plutôt à l'inverse en effectuant une collecte de données et en déterminant une équation à partir du nuage de points obtenus. La corrélation n'est plus un concept à voir parallèlement à l'étude des fonctions tard dans le développement de celle-ci et ce, à la fin du deuxième cycle, mais plutôt dès le début du cycle. Ce qui représente pour nous un avantage considérable au niveau pédagogique et didactique. En effet, cette modification permettra de rendre les « fonctions » beaucoup plus significatives et d'avoir accès à des situations-problèmes qui varient à l'infini.

Voilà donc pourquoi l'intégration de la calculatrice à affichage graphique permet de réaliser rapidement une étude beaucoup plus approfondie du phénomène, car elle donne l'occasion de créer plusieurs modèles rapidement et, donc, une analyse plus « fine » de ceux-ci. On peut ainsi réaliser une expérience fort simple et avec peu d'équipements, mais dont les résultats seront multiples et qui vont susciter un questionnement très pertinent (esprit critique, par exemple). Évidemment, certains opposants à l'usage d'outils technologiques dont la calculatrice voudront manifester leur désaccord en émettant l'idée que l'EAO<sup>5</sup> (expérimentation assistée par ordinateur) peut nuire à la compréhension de la nature même du phénomène. Nous répondons ici que l'outil ne remplace pas la bonne méthode « papier-crayon » pour tracer et interpréter le graphique ou pour faire l'expérience avec un thermomètre classique. Cependant, l'intégration de la technologie permettra une meilleure analyse du phénomène étudié et surtout de faire de nombreuses simulations... et modélisations.

Voilà pourquoi le MELS (2007, p. 56) considère que le « recours aux outils technologiques facilite une exploration et un examen plus détaillé de ces relations et permet d'en donner une description et une explication plus complètes ».

## Conclusion

Au terme de cet article, nous voulons saluer ce changement dans le programme de mathématique de deuxième cycle du secondaire qui constitue une avancée considérable au niveau de l'intégration et des visées interdisciplinaires. Il permet de rendre la mathématique beaucoup plus concrète, pertinente, signifiante tout en étant moins statique. Le lien avec les sciences n'en devient que plus évident et intéressant. Cette activité simple à réaliser et applicable à plusieurs niveaux, permet de voir l'ampleur de ce changement et son lien très étroit avec la science et la technologie.

Cette complicité, voire cette complémentarité entre ces deux champs disciplinaires permet, pensons-nous de pouvoir amener les élèves à s'inscrire dans une logique de problématisation d'une situation telle la modélisation. *Allez-y, l'essayer, c'est l'adopter !* ■

## Notes

<sup>1</sup> L'apprentissage par la modélisation dans l'enseignement des sciences a été le thème d'un numéro spécial de l'*International Journal of Science Education*. Depuis, la revue *Aster* y a consacré le numéro 43 (2006) intitulé Modélisation et Simulation.

<sup>2</sup> Selon le MELS (2007), la démarche de modélisation en Science et technologie consiste en la construction d'une représentation d'une situation rendue nécessaire pour concrétiser une réalité invisible. Le modèle élaboré peut prendre diverses formes : une comparaison, un dessin, un ensemble de symboles ou une maquette. Au fur et à mesure de la démarche de modélisation, le modèle se

refine et se complexifie. Il peut être valide pendant un certain temps et dans un contexte spécifique. Dans plusieurs cas, le modèle construit et validé par l'expérience ou par les pairs est appelé à être modifié ou rejeté. Il est également important de considérer le contexte dans lequel ce dernier a été construit. Le modèle construit doit posséder certaines caractéristiques. Il doit, entre autres, faciliter la compréhension de la réalité, permettre d'expliquer certaines propriétés de ce qu'il veut représenter et prédire de nouveaux phénomènes observables.

<sup>3</sup> La démarche d'observation est l'une des démarches proposées dans le cadre du nouveau programme de Science et technologie au deuxième cycle du secondaire.

<sup>4</sup> Il importe d'insister auprès des jeunes sur la distinction entre chaleur et température.

<sup>5</sup> Encore une fois, le numéro 43 de la Revue *ASTER* renferme d'excellents articles sur le rôle et la fonction de l'EAO dans la modélisation et la simulation : [www.inrp.fr/publications/aster](http://www.inrp.fr/publications/aster)

## Références bibliographiques

Gervais, G. (2005). *Collaboration Math-Sciences pour des activités d'apprentissage signifiantes*. 32<sup>e</sup> Session de perfectionnement du GRMS, St-Lambert.

Hasni, A. et Samson, G. (à paraître, a). Développer les compétences en gardant le cap sur les savoirs. Première partie : place de la problématisation dans les démarches à caractère scientifique, *SPECTRE*.

Hasni, A. et Samson, G. (à paraître, b). Les démarches à caractère scientifique et technologique au secondaire. Deuxième partie : la diversité des démarches à caractère scientifique et leurs liens avec les savoirs disciplinaires, *SPECTRE*.

Ministère de l'Éducation du Québec. (1995). *Programme d'études en mathématique 314 pour l'enseignement au secondaire*. Québec, Gouvernement du Québec. 54 p.

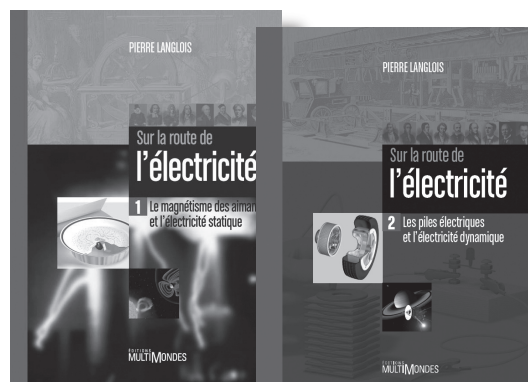
Ministère de l'Éducation du Québec. (1996a). *Programme d'études en mathématique 416 pour l'enseignement au secondaire*. Québec, Gouvernement du Québec, 41 p.

Ministère de l'Éducation du Québec. (1996b). *Programme d'études en mathématique 436 pour l'enseignement au secondaire*. Québec, Gouvernement du Québec, 54 p.

Ministère de l'Éducation du Québec. (1997a). *Programme d'études en mathématique 514 pour l'enseignement au secondaire*. Québec, Gouvernement du Québec, 42 p.

Ministère de l'Éducation du Québec. (1997b). *Programme d'études en mathématique 536 pour l'enseignement au secondaire*. Québec, Gouvernement du Québec, 51 p.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (2007). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, 2<sup>e</sup> cycle* (Version approuvée). Québec, Gouvernement du Québec.



## Sur la route de l'électricité

### 1. Le magnétisme et l'électricité statique

108 pages en couleurs, reliure souple, ISBN 978-2-89544-075-8, 24,95 \$

### 2. Les piles électriques et l'électricité dynamique

128 pages en couleurs, reliure souple, ISBN 978-2-89544-086-4, 24,95 \$

Une initiation à l'électricité par l'histoire et l'expérimentation qui vise à stimuler le goût des sciences auprès des jeunes. L'approche structurée et systématique entraîne le lecteur dans un processus graduel de découvertes, de l'Antiquité à aujourd'hui, à travers des épisodes abondamment illustrés.

Cette nouvelle approche pédagogique, qui interpelle beaucoup l'émotion, la créativité et le plaisir, met l'accent sur les expériences, les observations et les réflexions des savants, replacées dans leur contexte historique. Le lecteur est invité à reproduire lui-même plusieurs de ces expériences historiques, avec du matériel facile à trouver chez soi ou à la quincaillerie.

[www.multim.com](http://www.multim.com)

ÉDITIONS  
**MULTIMONDES**