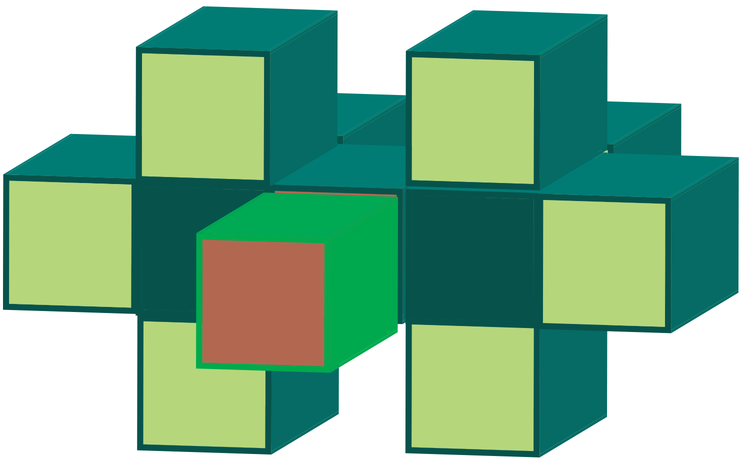
Une brève histoire de la Combinatoire de l'Antiquité à Aujourd'hui

PAR

ALAIN GOUPIL



28 Février 2017

PLAN

1- QU'EST-CE QUE LA COMBINATOIRE ?

ÉTUDE DES CONFIGURATIONS D'OBJETS EN PROVENANCE

des champs mathématiques traditionnels,

des sciences expérimentales :

algèbre, théorie des nombres, géométrie, physique

statistique, informatique, biologie … etc.

COMBINATOIRE : RENAISSANCE D'UNE ANCIENNE DISCIPLINE

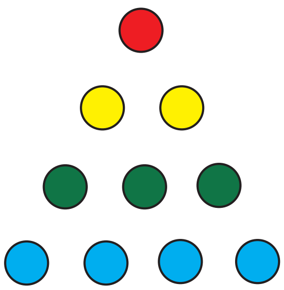
UNE ACTIVITÉ QUI A RENDU LA COMBINATOIRE MODERNE TRÈS POPULAIRE EST LA REVISION DES CHAMPS TRADITIONNELS DE CONNAISSANCE MATHÉMATIQUES, LEURS MODÈLES DISCRETS L'ÉTABLISSEMENT DE NOUVELLES CONFIGURATIONS.

CES INVESTIGATIONS

- AMÈNENT DE NOUVELLES PREUVES DE RÉSULTATS CONNUS,
- INTRODUISENT DE NOUVEAUX RÉSULTATS À INTERPRÉTER DANS LES CHAMPS TRADITIONNELS,
- CRÉENT DES LIENS ENTRE DES RÉSULTATS APPARTENANT À DES CHAMPS DIFFÉRENTS.

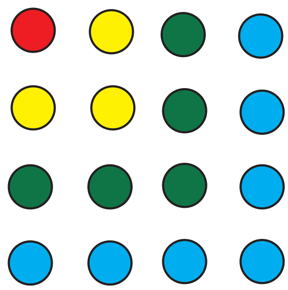
1- Un exemple de l'Antiquité :

NOMBRES GÉOMÉTRIQUES (VIe s. av. J.C.)



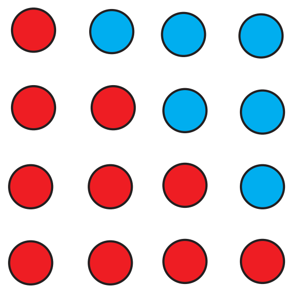
1,3,6,10,...

triangulaires $T(n)$

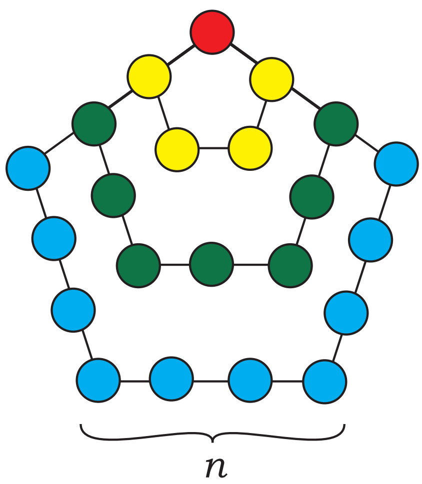


1,4,9,16,...

carrés $C(n)$

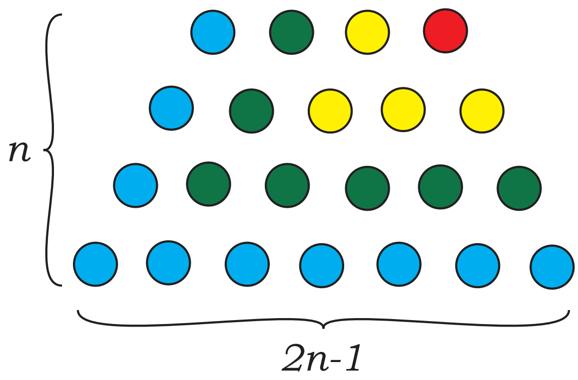


$C(n)=T(n)+T(n-1)$



1,5,12,22,...

pentagonaux $Pent(n)$



trapézoidaux $trap(n,k)$

$$Pent(n)=trap(2n-1,n)=T(2n-1)-T(n-1)$$

Récurrences, interconnexions, … etc.

2- UN EXEMPLE DU XVIIIe SIÈCLE : LES PARTAGES

QUESTION POUR HOMO SAPIENS. COMMENT REPRÉSENTE-T-ON 7 AVEC LES DOIGTS DES DEUX MAINS ?

RÉPONSE. 7=5+2 ou 7=4+3

DÉF. PARTAGE D'UN ENTIER n :
ENSEMBLE D'ENTIERS POSITIFS $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k$ **DONT LA SOMME VAUT *n*.**

NOMBRE DE PARTAGES D'UN ENTIER *n* : *p*(*n*),

EXEMPLE.

4= 4,
3+1,
2+2,
2+1+1,
1+1+1+1

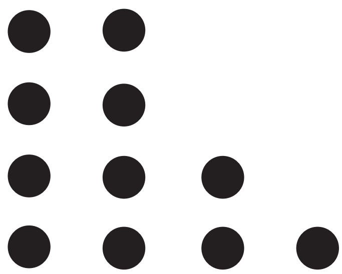
p(4)=5,

5 = 5,
4+1,
3+2,
3+1+1,
2+2+1,
2+1+1+1,
1+1+1+1+1, ***p*(5)=7,**

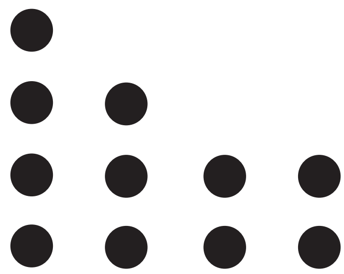
QUESTION. **COMBIEN Y A-T-IL DE PARTAGES DE *n* ?**

RÉPONSE : NON TRIVIALE

Représentation géométrique : Diagrammes de Ferrers



4,3,2,2



4,4,2,1

1- Euler (1768) :

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15)\cdots$$
$$= \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1}\, p(n - k(3k \pm 1)/2).$$

Exemple.

$$\boldsymbol{p(6) = p(5)+p(4)-p(1),}$$
$$\boldsymbol{= 7 + 5 - 1 = 11,}$$

Nombres pentagonaux généralisés : $k(3k\pm 1)/2$: 1,2,5,7,12,…
Nombres pentagonaux : $k(3k-1)/2$: 1,5,12, 22, …

élément de preuve (F. Franklin, 1881) : Théorème pentagonal

$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\big|_{x^n} =$ *nombre de partages de n en parts distinctes*

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + \cdots$$

2- HARDY, RAMANUJAN (1918) : ESTIMATION ASYMPTOTIQUE

$$p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} exp\left(\pi \sqrt{\frac{2}{3}(n - \frac{1}{24})} \right)$$

Conséquence. La fonction *p*(*n*) est de la forme

$$p(n) \approx \frac{cte}{n} \times b^{\sqrt{n}}$$

et croît plus vite que tout polynôme et plus lentement que toute fonction exponentielle $f(n)=b^n$

3- Rademacher (1937)

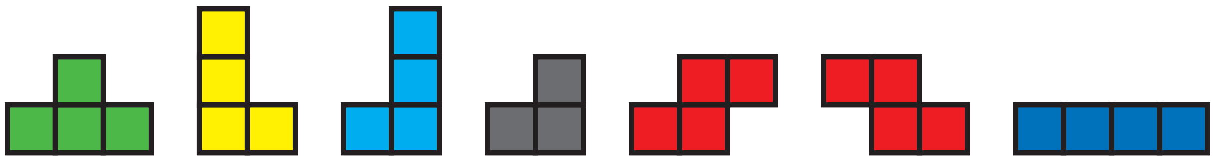
$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k}\, \frac{d}{dn}\left(\frac{sinh\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}(n - \frac{1}{24})} \right)}{\sqrt{(n - \frac{1}{24})}} \right)$$

où

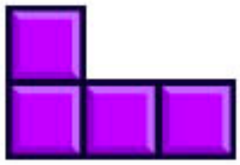
$$A_k(n) = \sum_{\substack{0 \le m < k \\ (m.k)=1}} exp(\pi i \left[s(m,k) - 2mn / k \right])$$

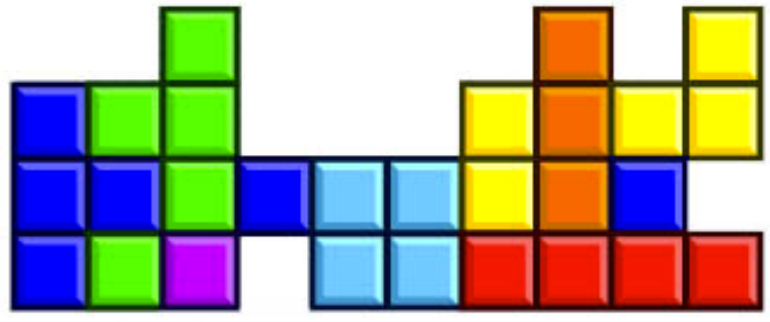
où s(m,k) est une somme de Dedekind …

3- UN EXEMPLE DU XXIe SIÈCLE : LES POLYOMINOS



Polyominos d'aire 4 bien connus





DÉFINITION. Un polyomino est un ensemble connexe de cellules carrées unitaires dans le plan discret. La connexion entre deux carrés voisins se fait par les côtés (4-connexité).

POLYOMINOS ÉGAUX À TRANSLATION PRÈS

Lorsqu'un polyomino est obtenu d'un autre par une translation, on dit que les deux polyominos sont égaux.

AIRE D'UN POLYOMINO = nombre de cellules

ORIGINE. Les polyominos sont d'abord apparus dans des jeux mathématiques (pavage) puis ont servi de modèles dans des problèmes de percolation en physique statistique.

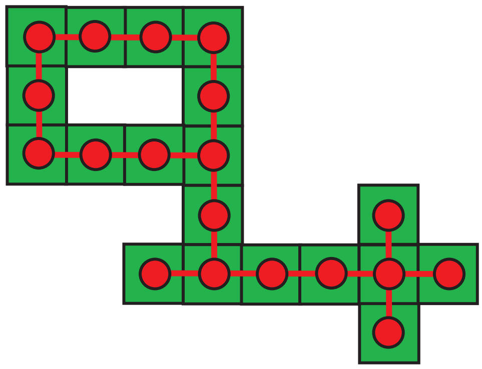
● **PEUT-ON PAVER UNE RÉGION DU PLAN AVEC UN ENSEMBLE DONNÉ DE TUILES ? N-P DIFFICILE**

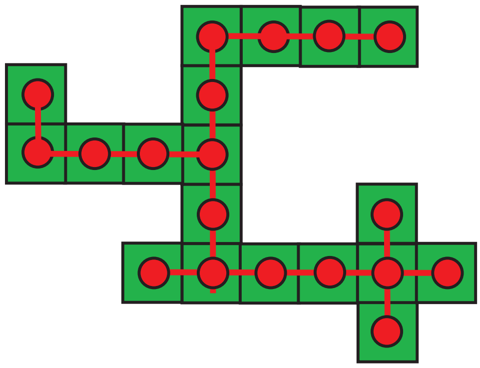
● **PEUT-ON PAVER LE PLAN AVEC UN ENSEMBLE DONNÉ DE TUILES ? INDÉCIDABLE**

● **TROUVER LE NOMBRE DE POLYOMINOS D'AIRE *n* : INCONNU POUR N>56**.

ON COMPTE AVEC UN PROGRAMME INFORMATIQUE.
TEMPS DE CALCUL EXPONENTIEL
RECORD : I. Jensen, 2004, $n = 56$. $P(56) \approx 6{,}9 \times 10^{31}$

POLYOMINOS-ARBRES



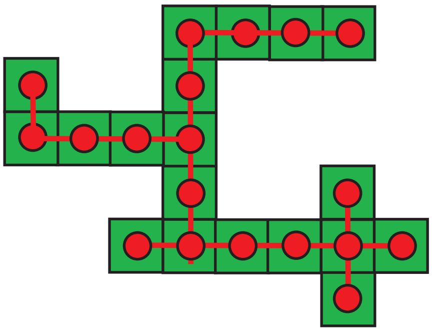


Polyomino arbre

GRAPHE SOUS-JACENT

- **CHAQUE CELLULE EST UN SOMMET**
- **IL Y A UNE ARÊTE ENTRE DEUX CELLULES SI ELLES SONT ADJACENTES PAR LEURS ARÊTES.**
- **SI LE GRAPHE EST ACYCLIQUE, C'EST UN POLYOMINO-ARBRE.**
- **FEUILLE : SOMMET DE DEGRÉ 1 (UN VOISIN).**

NOMBRE MAXIMAL DE FEUILLES



QUESTION. QUEL EST LE NOMBRE MAXIMAL DE FEUILLES DANS UN POLYOMINO-ARBRE À n CELLULES.

$L_2(n)$:=NOMBRE MAXIMAL DE FEUILLES DANS UN ARBRE DE TAILLE n

- CALCULER $L_2(n)$ POUR $n = 1,2,3,\ldots,10$
- CONJECTURER UNE FORMULE GÉNÉRALE POUR $L_2(n)$

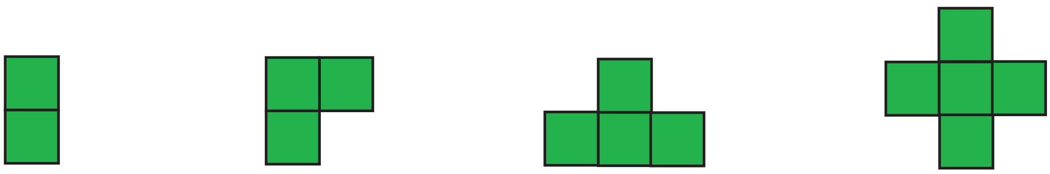
THÉORÈME (Blondin Massé, A.G., J. de Carufel, M. Samson)
SOIT LA FONCTION

$$\ell_2(n) = \begin{cases} 0 & si\ n=1, \\ 2 & si\ n=2, \\ n\text{-}1 & si\ n=3,4,5, \\ \ell_2(n-4)+2 & si\ n \geq 6 \end{cases}$$

ALORS $\ell_2(n) = L_2(n)$.

IDÉE DE LA PREUVE $\ell_2(n) \leq L_2(n)$.

On construit, par induction, une famille de polyominos arbres qui satisfont la récurrence.



$n=2$ $\qquad$ $n=3$ $\qquad$ $n=4$ $\qquad$ $n=5$

$\ell_2(2)=2$ $\qquad$ $\ell_2(3)=2$ $\qquad$ $\ell_2(4)=3$ $\qquad$ $\ell_2(5)=4$

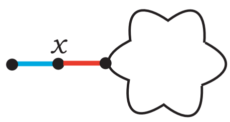
Induction : on construit A_{n+4} en collant le polyomino $n=4$ sur le haut de A_n.

IDÉE DE LA PREUVE $\ell_2(n) \geq L_2(n)$.

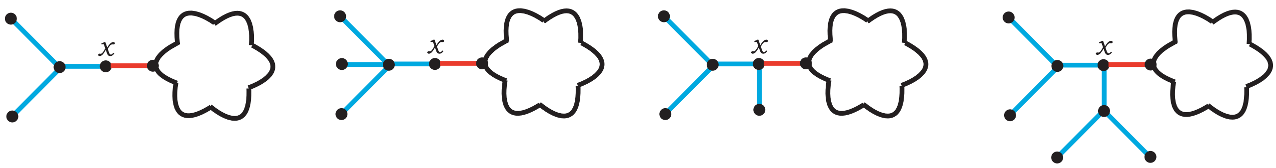
- NOUS PROCÉDONS PAR BRISURE DE CONTRE-EXEMPLE MINIMAL

- SUPPOSONS QU'IL EXISTE DES POLYOMINO-ARBRES AVEC PLUS DE $\ell_2(n)$ FEUILLES.
- SUPPOSONS QUE n EST MINIMAL.

- ALORS ON PEUT CONSTRUIRE UN AUTRE CONTRE-EXEMPLE DE TAILLE INFÉRIEURE À n



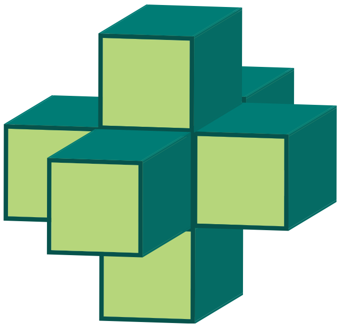
Profondeur 1



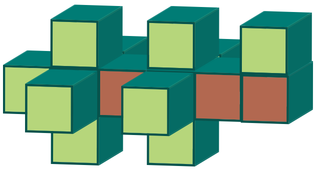
a) *b)* *c)* *d)*

Profondeur 2

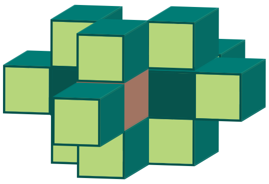
POLYCUBES

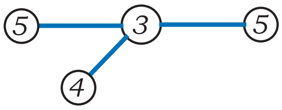


- LA VERSION 3D DES POLYOMINOS ES APPELÉE POLYCUBE ;
- CHAQUE CELLULE POSSÈDE AU PLUS 6 VOISINS
- LA MÊME QUESTION SE POSE : QUEL EST LE NOMBRE MAXIMAL DE FEUILLES DANS UN POLYCUBE- ARBRE À n CELLULES ?

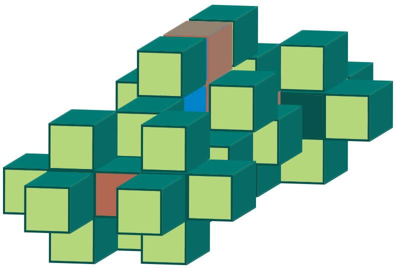


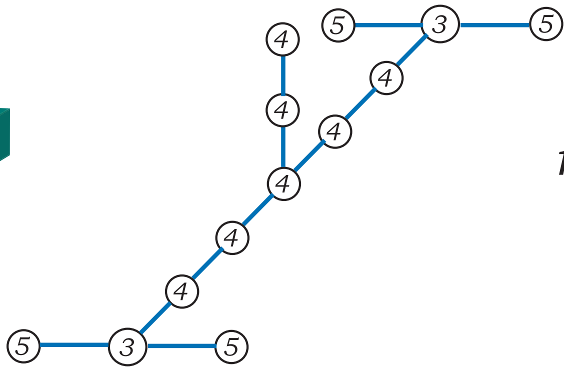
$n=15,\ n_1 = 10$





$n=15,\ n_1 = 11$





$n=43,\ n_1 = 30$

THÉORÈME **(**Blondin Massé, A.G., J. de Carufel, M. Samson**)** Pour tout entier n >0, le nombre maximal de feuilles que peut posséder un polycube-arbre à n cellules est

$$\ell_3(n) = \begin{cases} 0 & si\ n=1, \\ f_3(n)+1 & si\ n=6,7,13,19,25; \\ f_3(n) & si\ 0 \leq n \leq 40\ et\ n \neq 1,6,7,13,19,25; \\ f_3(n-41)+28 & si\ 41 \leq n \leq 81; \\ \ell_3(n-41)+28 & si\ 82 \leq n; \end{cases}$$

où

$$f_3(n) = \begin{cases} \lfloor (2n+2)/3 \rfloor, & si\ 0 \leq n \leq 11; \\ \lfloor (2n+3)/3 \rfloor, & si\ 12 \leq n \leq 26; \\ \lfloor (2n+4)/3 \rfloor, & si\ 27 \leq n \leq 40; \end{cases}$$

Conclusion

À quoi ces arbres servent-ils ?

On ne sait pas …

Peut-être en chimie moléculaire ou dans les réseaux cristallins ou en architecture.

Quelle est la suite ?

- Étendre les résultats à d'autres réseaux,
- Étudier le problème sur des graphes quelconques.

Théorème. **(**Blondin Massé, A.G., É. Vandomme,**)**
Le problème de décider si un graphe simple possède un sous-arbre induit de n **cellules** et ℓ **feuilles** est NP-complet.

- Compter ces objets …