

# CIGI QUALITA MOSIM 2023

## Optimisation d'une politique de garantie combinée utilisant des produits remanufacturés

LUXUAN YVELINE GAO<sup>1</sup>, ABDELHAKIM KHATAB<sup>2,3</sup>, CLAVER DIALLO<sup>3</sup>, UDAY VENKATADRI<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Nanjing University of Science and Technology  
200 Xiaoligwei St. Nanjing, Jiangsu, Chine  
yveline\_glx@163.com

<sup>2</sup> Université de Lorraine, ENIM  
1, route d'Ars Laquenexy, 57078, Metz, France  
abdelhakim.khatab@univ-lorraine.fr

<sup>3</sup> Dalhousie University, Department of Industrial Engineering  
5269 Morris Street, Halifax NS B3H 4R2 Canada  
cd@dal.ca  
uday.venkatadri@dal.ca

---

**Résumé** – La prise de conscience grandissante de la nécessité de protéger les ressources de la planète et les objectifs de développement durable obligent les fabricants à récupérer et à remettre à neuf leurs produits usagés dans le cadre de programmes de responsabilité élargie des producteurs (REP). Afin de prolonger leur cycle de vie, les produits remanufacturés sont renvoyés sur le marché, utilisés comme pièce de rechange ou comme produits de remplacement pour honorer les garanties. Cet article présente deux modèles mathématiques pour déterminer la politique optimale de garantie combinée lorsque des produits remanufacturés sont utilisés pour honorer les garanties tant du point de vue du vendeur que de celui de l'acheteur. Plusieurs applications numériques sont menées pour valider les modèles et déduire des orientations pour la gestion du remanufacturing et des lignes directrices pour les consommateurs.

**Abstract** – Growing awareness for the need to protect the planet's resources and the Sustainable Development Goals are forcing manufacturers to recover and refurbish their used products under extended producer responsibility (EPR) programs. To extend their life cycle, remanufactured products are returned to the market, used as spare parts or as replacement products to honour warranties. This article presents two mathematical models for determining the optimal combined warranty policy when remanufactured products are used to honour warranties from both the seller's and buyer's perspectives. Several numerical experiments are conducted to validate the models and derive insights for remanufacturing management and develop guidelines for consumers.

**Mots clés** - Fiabilité, Garantie, Produits remanufacturés, Optimisation, Perspectives du vendeur/consommateur.

**Keywords** – Reliability, Warranty policy, Remanufactured systems, Optimization, Seller/buyer perspectives.

---

### 1 INTRODUCTION

La législation sur le développement durable ainsi que les préoccupations des consommateurs pour l'environnement sont entrain de forcer les entreprises et organisations du monde entier à adapter leurs pratiques de fabrication et à adopter de nouvelles façons de valoriser les produits en fin d'utilisation ou en fin de vie. Les processus de ré-usinage ou remanufacturing tels que la remise à neuf et le reconditionnement sont des exemples d'activités qui peuvent prolonger le cycle de vie des produits [Liu et al., 2020]. Les possibilités économiques de remise à neuf ont généré de plus en plus de volumes substantiels de produits remanufacturés qui sont principalement vendus à des consommateurs soucieux de l'environnement. Les pièces remanufacturées sont également couramment utilisées comme pièces de rechange dans la réparation et la maintenance. L'objectif de cet article est d'étudier l'utilisation de produits remanufacturés comme produits de remplacement pour honorer

les réclamations de garantie. Dans la littérature, ces produits remanufacturés sont aussi parfois appelés produits remis à neuf, de seconde main ou d'occasion [Khatab et al., 2017].

Une garantie de produit est un accord contractuel offert par le fabricant ou le vendeur à l'acheteur au point de vente d'un produit pour établir la responsabilité en cas de défaut [Blischke et Murthy, 1996; Murthy, et Djamaludin, 2002]. L'utilisation des garanties est universelle et sert à de nombreuses fins. Il assure le consommateur ou l'acheteur que le vendeur corrigera tous les défauts et bris durant la période de garantie à un coût réduit ou nul. Pour les fabricants, la garantie agit comme un outil promotionnel pour augmenter les ventes et les revenus en inférant la haute qualité de leurs produits. Selon [Shafiee et Chukova, 2013a; Shafiee et Chukova, 2013b], les fabricants américains dépensent plus de 25 milliards de dollars en maintenance à la suite des réclamations de garantie, ce qui constitue environ 2% de leurs revenus annuels de vente. Selon

le rapport annuel 2009 de General Motors, la société avait un chiffre d'affaires total de 104,2 milliards de dollars et le coût de la garantie future sur les voitures vendues estimé à 2,7 milliards de dollars, soit environ 2,6% du chiffre d'affaires. Lors de l'achat d'un produit, l'acheteur est généralement confronté à la tâche difficile de décider entre l'achat de la garantie ou non. Et lorsque la décision est d'obtenir la garantie, choisir entre différentes caractéristiques et les politiques de garantie est un autre défi. Lorsque la période de garantie est facultative, le consommateur doit décider si la garantie vaut le coût supplémentaire en fonction de connaissances très limitées. Cela devient de plus en plus important, car il y a une tendance croissante parmi les fabricants à offrir des garanties à durée prolongée. Il s'agit de coûts supplémentaires dont les modalités peuvent varier considérablement [Blischke et Murthy, 1996; Yun et al., 2008]. Souvent, au moment de l'achat, le consommateur doit décider, sur la base d'informations très limitées, s'il opte pour une garantie prolongée ou non et déterminer les meilleures conditions prolongées pour sa situation lorsqu'il y a plusieurs options [Blischke et Murthy, 1996]. L'acheteur moyen n'est pas en mesure d'effectuer une analyse mathématique avant de faire un choix parce que le consommateur n'a ni l'expertise pour une telle analyse ni le pouvoir de négociation pour obtenir des données pertinentes du fabricant ou du vendeur. Toutefois, les organismes de réglementation et de protection du consommateur peuvent effectuer de telles analyses et informer le grand public. Tout modèle développé du point de vue de l'acheteur dans cet article est alors supposé avoir été fait pour une agence de consommateurs au nom de tous les consommateurs et avec des données obtenues par l'agence auprès des fabricants ou d'organismes d'examen indépendants établis et reconnus tels que les magazines Consumer Reports et Protégez-Vous en Amérique du Nord, ou 60 Millions de consommateurs en France.

Il existe de nombreux types de politiques de garantie conçues pour couvrir les besoins des fabricants, des vendeurs et des consommateurs. Une politique qui est basée sur un seul facteur (e.g., l'âge) est dit unidimensionnel (1D), d'autre part une garantie bidimensionnelle (2D) est limitée par le premier de deux facteurs (e.g., l'âge et une mesure de l'utilisation du produit). Les stratégies 1D sont couramment utilisées pour les produits à durée de vie relativement bien définie tels que les téléphones portables, ordinateurs et autres petits produits électroménagers. Les garanties 2D s'appliquent aux produits qui présentent une usure ou une dégradation avec l'utilisation. Les automobiles, les systèmes hydrauliques et mécaniques et les machines lourdes sont des exemples de produits avec politiques de garantie 2D. Les garanties de base les plus courantes sont le remplacement gratuit (FRW – Free replacement warranty), la garantie au prorata (PRW – Prorata warranty) et la garantie de remise (Rebate warranty). Sous la garantie de remplacement gratuite (FRW), le fabricant accepte de réparer ou remplacer gratuitement un article défectueux pendant la période de garantie. Sous la garantie au prorata (PRW), le client couvre une partie du coût de réparation au prorata de l'âge de l'article au moment la défaillance ou bien le fournisseur offre une couverture dont la valeur décroît avec l'âge du produit ou sa dégradation. C'est une politique appliquée sur les pneus par exemple. Finalement, avec la garantie de remise, le vendeur accepte de rembourser une certaine proportion du prix d'acquisition à l'acheteur si le produit tombe en panne durant la période de garantie. Le montant du remboursement peut être une fonction linéaire ou non linéaire du temps de garantie écoulé. Des taxonomies des politiques de garantie sont présentées dans

[Blischke et Murthy, 1996]. [Shafiee et Chukova, 2013b] a développé une taxonomie intégrée de garantie et de maintenance basée sur trois catégories : le type de produit, la politique de garantie et la stratégie de maintenance.

Les garanties hybrides (combinées) sont conçues pour utiliser les caractéristiques souhaitables des garanties pures telles que celles discutées ci-dessus et minimiser certains de leurs inconvénients [Blischke et Murthy, 1996]. La garantie combinée offre à l'acheteur une protection complète en cas de défaillance tardive lorsque la période garantie est presque entièrement écoulée. Ce type de garantie a une valeur promotionnelle importante pour le fabricant tout en offrant un contrôle adéquat sur les coûts pour l'acheteur et le fabricant. Un exemple de garantie hybride est la politique FRW/PRW offerte sur certains pneus. Au cours des trois premières années de service, le pneu est remplacé gratuitement. Au-delà de l'année 3, le prix de remplacement est calculé au prorata des années écoulées depuis la date de l'achat initial. D'autres avantages des garanties combinées sont une meilleure protection du produit, la satisfaction élevée des clients, une durée de possession plus élevée pour les acheteurs et un volume de ventes plus élevé qui augmente les profits du fabricant.

[Chari, 2015] et [Diallo et al., 2018] montrent que la garantie combinée était appropriée pour les produits remis à neuf, car elle offre une bonne protection pour les fabricants et les consommateurs. [Alqahtani et Gupta, 2017] démontrent comment la garantie est utilisée comme stratégie de marketing pour les produits remis à neuf. Les consommateurs qui achètent des produits remanufacturés font face à l'incertitude sur la durabilité (fiabilité) et l'absence d'historique d'utilisation et d'entretien antérieurs [Alqahtani et Gupta, 2017; Shafiee et Chukova, 2013a]. Afin de réduire le risque et l'impact d'une défaillance du produit remanufacturé, les fabricants offrent généralement des politiques de garantie généreuses. Un examen des modèles de garantie actuellement disponibles dans la littérature pour les produits neuf ou remis à neuf montre que la très grande majorité traite de la maximisation des profits des fabricants [Chari et al., 2016; Diallo et al., 2017; Shafiee et Chukova, 2013b; Su et Wang, 2016]. Très peu de travaux abordent le problème de la garantie du point de vue des consommateurs [Rahman et Chattopadhyay, 2004; Chattopadhyay et Rahman, 2008; Wu et Longhurst, 2011].

[Shafiee et Chukova, 2013b] développe un modèle pour trouver l'âge du produit reconditionné à utiliser, la période de garantie à offrir et le niveau de mise à niveau à effectuer pour maximiser le profit moyen du fabricant ou du vendeur. Dans [Lo et Yu, 2013], l'objectif est de déterminer le niveau de reconditionnement optimal et la durée de la garantie afin de maximiser le profit moyen pour un concessionnaire de voitures d'occasion. Un modèle conjoint d'optimisation du prix et du niveau de reconditionnement pour des perceuses électriques a été proposé par [Naini et Shafiee, 2011]. [Chari et al., 2013] ont élaboré un modèle mathématique pour une politique unidimensionnelle FRW avec des remplacements effectués uniquement avec des composants reconditionnés. Un modèle d'inspection/mise à niveau périodique avec une durée de garantie fixe pour un produit d'occasion est formulé par [Kim et al., 2015]. Les auteurs déterminent conjointement le nombre optimal d'inspections requises et un niveau d'amélioration optimal pour minimiser le coût total moyen de la garantie du point de vue du concessionnaire pendant la période de garantie. [Lim et al., 2019] étudie une politique de maintenance post-

garantie optimale pour un produit remis en état vendu avec une période de garantie de durée fixe. Pendant la période de garantie, le produit est périodiquement inspecté et entretenu préventivement aux frais de l'acheteur, tandis que toute défaillance du produit est minimalement réparée par le vendeur. Après l'expiration de la garantie, les coûts de maintenance sont à la charge de l'acheteur. [Dai et al., 2021] étudient différentes stratégies de maintenance préventive (MP) pour les produits remis en état couverts par une garantie bidimensionnelle du point de vue des vendeurs et des clients. Le produit usagé est remis en état avant d'être livré au client suivant, puis il est maintenu préventivement selon les différentes stratégies de MP adoptées. [Diallo et al., 2018] proposent une politique de garantie combinée avec des remplacements par produits remanufacturés dans la seconde phase de la période de garantie. Ils développent des modèles du point de vue du fabricant et du consommateur.

Il ressort des exemples mentionnés ci-dessus que la plupart des modèles de garantie pour les produits remis à neuf sont pour la plupart développés du point de vue du fabricant. L'objectif de cet article est de remédier à cette lacune en proposant une nouvelle politique de garantie combinée et des modèles mathématiques du point de vue des fabricants et des consommateurs. Cet article est une extension du modèle de garantie proposé par [Diallo et al., 2018]. De nouvelles conditions nécessaires sont établies pour aider les consommateurs dans leurs décisions de souscrire ou non à des garanties selon les longueurs de couverture offertes et les suppléments à déboursier.

Le reste de cet article est structuré comme suit. La section 2 détaille la notation utilisée, puis présente la politique de garantie à l'étude. Deux modèles mathématiques sont développés selon les perspectives du fabricant et du consommateur aux sections 3 et 4. Deux séries d'expériences numériques sont menées, et leurs résultats sont analysés pour dériver des lignes directrices pour les consommateurs dans la section 5. Les conclusions sont tirées et les pistes de recherches futures sont décrites à la section 6.

## 2 GARANTIE COMBINÉES OPTIMALES UTILISANT DES PRODUITS REMANUFACTURÉS

Pour la plupart des politiques de garantie, les produits défectueux sont réparés ou remplacés par de nouveaux composants ou produits. Dans le contexte de la fabrication durable, les produits remanufacturés sont disponibles et peuvent donc être réutilisés comme substituts lorsque les consommateurs retournent des produits défectueux [Diallo et al. 2014 ; Yeh et al., 2005 ; Yeh et al., 2011]. Ce faisant, les fabricants ou les vendeurs peuvent réduire leurs coûts et les consommateurs peuvent jouir plus longtemps de leurs produits. Cependant, on sait que les produits remanufacturés ont potentiellement une fiabilité inférieure à celle des nouveaux [Chari et al., 2016 ; Diallo et al. 2014], il est donc important de déterminer les paramètres optimaux de la politique de garantie à offrir pour éviter des coûts plus élevés au fabricant et offrir une période de temps de performance/propriété élevée au consommateur ou l'acheteur. Dans cet article, nous développerons deux modèles mathématiques pour une politique de garantie de remise combinée utilisant des produits remis à neuf comme produits de remplacement.

La garantie proposée offre une période de couverture de durée  $w_2$  à tout produit neuf vendu. Cette période de couverture  $w_2$  est divisée en deux périodes de longueur  $w_1$  et  $w_2 - w_1$  selon la Figure 1. Le vendeur ne remplacera un produit défectueux qu'une seule fois par :

- un produit neuf si la défaillance se produit dans l'intervalle  $[0, w_1]$  (Phase 1);
- un produit remis à neuf gratuitement ou un produit neuf moyennant un supplément  $s$ , si la défaillance se produit dans l'intervalle  $(w_1, w_2]$  de durée  $w_2 - w_1$  (Phase 2). Les produits neufs sont d'âge  $u = 0$ . Les produits reconditionnés ont un âge  $u > 0$ .

La durée de la seconde période de couverture est proportionnelle à la première période par un facteur  $k$  qui est une variable de décision telle que :  $w_2 - w_1 = k \cdot w_1$  avec  $k \geq 1$ . Ainsi,  $w_2 = (1+k)w_1$ .

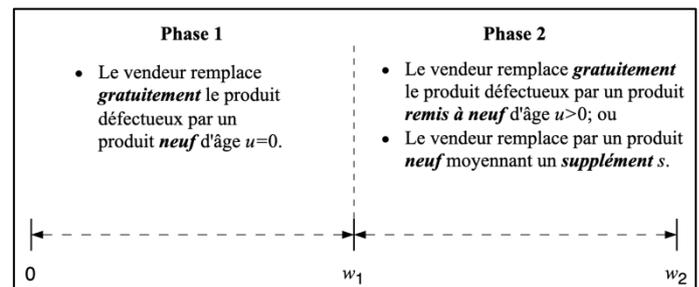


Figure 1. Politique de garantie proposée

Le système de notation ci-dessous est utilisé pour modéliser le problème considéré.

### Paramètres

$C_r(u)$	Coût unitaire par produit reconditionné d'âge $u$
$C_0$	Coût unitaire de produit neuf
$C_{wr}$	Coût moyen de la garantie si l'acheteur opte pour un remplacement gratuit par un produit reconditionné
$C_{wn}$	Coût moyen de la garantie si l'acheteur opte pour un remplacement payant par un produit neuf
$a$	Coefficient de prix
$b_i$	Coefficient de garantie
$D_0$	Facteur d'amplitude de la demande
$D_1$	Constante de préférence

### Variables de décisions

$p$	Prix unitaire de vente du produit neuf
$s$	Supplément à payer pour un remplacement par du neuf
$w_1$	Durée de la première phase de garantie
$w_2$	Durée de la deuxième phase de garantie
$\alpha$	Facteur d'échelle entre le prix de vente $p$ et le supplément $s$
$u$	Age du produit remanufacturé

### Fonctions

$f(t)$	Fonction de densité de probabilité des durées de vie du produit
$F(t)$	Fonction cumulative de distribution de panne
$R(t)$	Fonction de survie ou de fiabilité
$Q(t)$	Profit total moyen du manufacturier/vendeur
$D_r$	Demande pour les produits remanufacturés durant la seconde période de garantie
$D_n$	Demande pour les produits neufs durant la seconde période de garantie
$MTP$	Moyenne des temps de possession
$MTTF$	Moyenne des temps jusqu'à la première panne

<i>RM TTF</i>	Durée de vie résiduelle moyenne
<i>MTUC<sub>1</sub></i>	Moyenne des temps de possession par unité de coût si la garantie est souscrite
<i>MTUC<sub>2</sub></i>	Moyenne des temps de possession par unité de coût sans garantie
<i>MTUC<sub>3</sub></i>	Moyenne des temps de possession par unité de coût avec garantie et supplément

Dans les sections qui suivent, deux modèles mathématiques seront développés : l'un pour la maximisation du profit moyen du vendeur et l'autre pour la maximisation du temps de possession de l'acheteur.

### 3 MAXIMISATION DU PROFIT MOYEN DU FABRICANT (MODÈLE 1)

#### 3.1 Coûts de garantie

Si le produit d'origine tombe en panne dans la période  $[0, w_1)$ , un nouveau produit est remis au client et le fabricant/vendeur encourt un coût  $C_0$ . Lorsque le produit original faillit dans l'intervalle  $(w_1, w_2]$ , l'acheteur peut choisir de payer une prime supplémentaire  $s$  pour obtenir remplacement par du neuf, ou obtenir un remplacement sans frais par un produit remanufacturé. Le coût  $C_r(u)$  du produit remanufacturé d'âge  $u$  qui est encouru par le fabricant est donné par

$$C_r(u) = \frac{C_0}{(1+u)^\epsilon} + u^\eta$$

où  $\epsilon > 0$  représente le taux de rabais sur les produits reconditionnés et  $\eta > 0$  modélise l'accroissement du coût dû au vieillissement. Par conséquent, on obtient  $C_r(u=0) = C_0$ .

Initialement, le coût des produits remanufacturés diminue avec l'âge. Il est commun dans la littérature que les articles remanufacturés coûtent moins cher que les neufs. Cependant, ce coût pour les produits remanufacturés atteint un minimum avant de repartir à la hausse avec l'âge pour tenir compte des difficultés techniques, logistiques et opérationnelles rencontrées lors des opérations de collecte, tri, démontage et reconditionnement produits telles que la non-disponibilité des pièces de rechange, l'obsolescence, et la corrosion.

Pour les acheteurs qui choisissent le produit remanufacturé d'âge  $u$  pendant la seconde période de garantie, le coût moyen de garantie  $C_{wr}$  est donné par l'expression suivante :

$$C_{wr} = C_0 F(w_1) + [F(w_2) - F(w_1)] C_r(u)$$

Pour les acheteurs qui choisissent le produit neuf moyennant le supplément  $s$  pendant la seconde période de garantie, le coût moyen de garantie  $C_{wn}$  est donné par l'expression suivante :

$$C_{wn} = C_0 F(w_1) + [F(w_2) - F(w_1)] C_0 = C_0 F(w_2)$$

Pour des durées de vie suivant la loi Weibull, la fonction  $F(t)$  est donnée par :

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\beta}, \quad t \geq 0.$$

Alors,

$$C_{wr} = C_0 \left( 1 - e^{-\left(\frac{w_1}{\theta}\right)^\beta} \right) + \left( e^{-\left(\frac{w_2}{\theta}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{w_1}{\theta}\right)^\beta} \right) C_r(u)$$

et

$$C_{wn} = C_0 \left( 1 - e^{-\left(\frac{w_2}{\theta}\right)^\beta} \right)$$

#### 3.2 Fonctions de demande

En général, la fonction de demande pour un produit est modélisée comme une fonction log-linéaire de la période de garantie et des prix de vente selon [Chari et al., 2016 ; Glickman et Berger, 1976]. Les acheteurs qui choisissent le produit remanufacturé comme remplacement ne paient que le prix d'achat  $p$ . Donc, la fonction de demande  $D_r$  est donnée par :

$$D_r = D_0 p^{-a} \prod_{i=1}^2 (D_1 + w_i)^{b_i}$$

Les acheteurs qui optent pour le produit neuf paie le supplément  $s$  en plus du prix initial d'achat  $p$ . Donc, la fonction de demande  $D_n$  est donnée par :

$$D_n = D_0 (p + s)^{-a} \prod_{i=1}^2 (D_1 + w_i)^{b_i}$$

Le paramètre  $a$  est le taux de diminution de la demande à mesure que le prix du produit augmente. Les paramètres  $b_i$  sont les taux d'augmentation du volume des ventes avec l'allongement des durées de garantie  $w_i$ . Les paramètres  $D_0$  et  $D_1$  sont estimés à partir d'enquêtes auprès des clients et d'études de marché empiriques telles que suggérées par [Montgomery et al., 2012]. Les équations de demandes ci-dessus reflètent la préférence des consommateurs pour une couverture de garantie plus longue et leur aversion des prix élevés.

#### 3.3 Profit total moyen

Le profit total moyen  $Q(\cdot)$  est la somme des profits dans chacune des deux périodes de garantie.

$$Q(p, u, k, \alpha, w_1) = (p - C_0 - C_{wr}) D_r + (p + s - C_0 - C_{w2}) D_n$$

La solution optimale est solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q(p, u, k, \alpha, w_1)}{\partial p} = 0, \text{ pour } p = p^* \\ \frac{\partial Q(p, u, k, \alpha, w_1)}{\partial u} = 0, \text{ pour } u = u^* \\ \frac{\partial Q(p, u, k, \alpha, w_1)}{\partial k} = 0, \text{ pour } k = k^* \\ \frac{\partial Q(p, u, k, \alpha, w_1)}{\partial \alpha} = 0, \text{ pour } \alpha = \alpha^* \\ \frac{\partial Q(p, u, k, \alpha, w_1)}{\partial w_1} = 0, \text{ pour } w_1 = w_1^* \end{cases} \quad (1)$$

Le système d'équations (1) est analytiquement difficile à résoudre pour la distribution de Weibull. C'est pourquoi une méthode de résolution numérique est utilisée dans la section des expériences numériques pour trouver la solution  $(p^*, u^*, k^*, \alpha^*, w_1^*)$  qui maximise le profit total moyen du fabricant  $Q(p, u, k, \alpha, w_1)$ .

### 4 MAXIMISATION DU TEMPS MOYEN DE POSSESSION PAR L'ACHETEUR (MODÈLE 2)

Cette section traite de la garantie du point de vue du consommateur ou de l'acheteur. L'objectif est de trouver une politique optimale qui maximise le temps moyen de possession

(ou de jouissance) par unité de prix payé. La politique de garantie introduite à la Section 2 est celle considérée.

Au moment de l'achat, le consommateur a trois choix :

- Option 1 : acheter le produit original avec garantie au prix  $p$  fixé par le fabricant et déterminé à l'aide du modèle 1 présenté ci-dessus ; ou
- Option 2 : acheter le produit original sans garantie à une fraction  $\rho$  ( $0 \leq \rho \leq 1$ ) du prix  $p$  ; ou
- Option 3 : acheter le produit original avec garantie au prix  $p$  fixé par le fabricant et payer le supplément  $s$  afin de bénéficier d'un remplacement par du neuf en cas de panne durant la deuxième période de garantie.

L'objectif du modèle 2 est de formuler le temps moyen de possession par unité de coût ( $MTUC_i$ ) pour les trois options ( $i=1,2,3$ ) et comparer leur comportement par l'analyse de leurs différences.

#### 4.1 Option 1 : Achat avec souscription de la garantie

Selon cette option, le consommateur jouit de son nouveau produit original de l'achat jusqu'à l'instant de la première défaillance dont la durée moyenne est le  $MTTF$ . En cas de bris, le consommateur obtient un produit de remplacement qui aura une durée de vie moyenne  $MTTF$  si la défaillance se produit au cours de la phase 1, sinon le produit de remplacement remanufacturé aura une durée de vie résiduelle moyenne  $RM TTF$  si la panne intervient dans la phase 2. Le produit original tombe en panne dans la phase  $i$  avec la probabilité  $[F(w_i) - F(w_{i-1})]$ . Par conséquent, le temps de possession moyen pour l'option 1 est donné par :

$$MTP_1 = M T T F + M T T F F(w_1) + R M T T F [F(w_2) - F(w_1)].$$

Puisque

$$M T U C_1 = \frac{M T P_1}{p}$$

alors,

$$M T U C_1 = \frac{M T T F [1 + F(w_1)] + R M T T F [F(w_2) - F(w_1)]}{p}$$

#### 4.2 Option 2 : Achat sans souscription de la garantie

Dans le cas de l'option 2, on a :

$$M T U C_2 = \frac{M T P_2}{\rho p}$$

alors,

$$M T U C_2 = \frac{M T T F}{\rho p}$$

#### 4.3 Option 3 : Achat avec souscription de la garantie et paiement du supplément

Pour l'option 3, le temps de possession moyen est donné par :

$$M T P_3 = M T T F + M T T F F(w_1) + M T T F [F(w_2) - F(w_1)]$$

$$M T P_3 = M T T F [1 + F(w_2)].$$

Ce résultat montre que la durée de la première période de garantie  $w_1$  n'a aucun effet sur la décision de payer le supplément. Seule la longueur de la seconde période de garantie  $w_2$  compte.

$$M T U C_3 = \frac{M T T F [1 + F(w_2)]}{p + s}$$

L'objectif principal étant de savoir s'il est bénéfique pour le consommateur de payer le supplément, nous allons donc comparer la troisième option avec les deux autres options.

#### 4.4 Comparaison des différentes options

##### 4.4.1 Comparaison des options 1 et 3.

$$\Delta = M T U C_1 - M T U C_3$$

$$\Delta = \frac{M T T F [1 + F(w_1)] + R M T T F [F(w_2) - F(w_1)]}{p} - \frac{M T T F [1 + F(w_2)]}{p + s}$$

En fixant  $\Delta = 0$ , on obtient la Proposition 1 qui suit avec

$$\gamma_1 = \frac{1 + F(w_2)}{1 + F(w_1) + \frac{R M T T F}{M T T F} [F(w_2) - F(w_1)]} - 1.$$

**Proposition 1 :** *Au moment de l'achat du produit original, les consommateurs ne devraient pas payer le supplément  $s$  pour obtenir un remplacement par du neuf durant la deuxième période de garantie si la condition  $\frac{s}{p} \geq \gamma_1$  est satisfaite. Autrement, il est bénéfique de payer le supplément  $s$  quand la condition  $\frac{s}{p} < \gamma_1$  est satisfaite.*

##### 4.4.2 Comparaison des options 2 et 3.

$$\Delta = M T U C_2 - M T U C_3$$

$$\Delta = \frac{M T T F}{\rho p} - \frac{M T T F [1 + F(w_2)]}{p + s}$$

En fixant  $\Delta = 0$ , on obtient la Proposition 2 qui suit avec

$$\gamma_2 = [1 + F(w_2)]\rho - 1.$$

**Proposition 2 :** *Au moment de l'achat du produit original, les consommateurs ne devraient pas payer le supplément  $s$  pour obtenir un remplacement par du neuf durant la deuxième période de garantie et opter pour l'achat sans garantie si la condition  $\frac{s}{p} \geq \gamma_2$  est satisfaite. Autrement, il est bénéfique de payer le supplément  $s$  quand la condition  $\frac{s}{p} < \gamma_2$  est satisfaite.*

## 5 RÉSULTATS NUMÉRIQUES

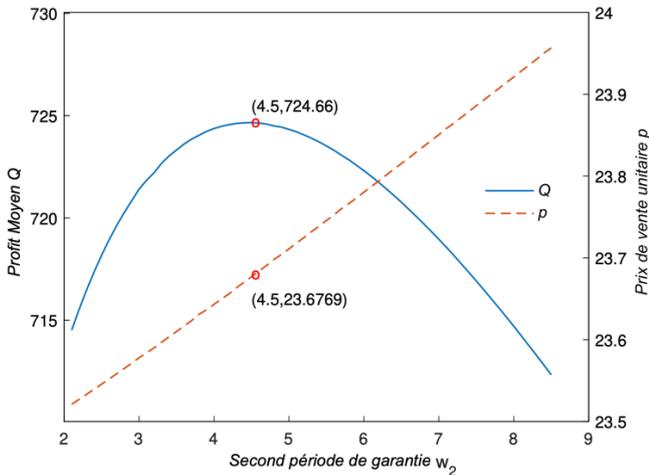
Deux séries d'expériences sont menées : une pour chacun des deux modèles développés dans la section précédente.

### 5.1 Expériences numériques pour le modèle 1.

Pour illustration, un exemple avec quatre variables de décision est considéré en fixant la durée de la première phase de couverture  $w_1$ . Ce cas est raisonnable s'il y a des concurrents sur le marché et que le fabricant se cale au minimum sur leur couverture de garantie. Les valeurs suivantes des paramètres sont utilisées pour trouver la solution optimale ( $p^*, u^*, k^*, \alpha^*$ ) qui maximise le bénéfice total moyen du fabricant :  $\theta = 25$ ;  $\beta = 1,2$ ;  $C_0 = 15$ ;  $D_0 = 100\ 000$ ;  $D_1 = 1$ ;  $a = 2,9$ ;  $b_1 = 1,2$ ;  $b_2 = 0,1$ ;  $\epsilon = 3,3$ ;  $\eta = 1,7$  et  $w_1 \in [2, 8]$ . Le logiciel Maple 2022 est utilisé pour trouver l'optimum local dans l'intervalle de recherche.

La figure 2 ci-dessous présente le profil du profit moyen en fonction de la longueur de la seconde période de garantie  $w_2$ .

Lorsque la deuxième phase de couverture de garantie devient plus longue, le fabricant encourt des risques et des frais de réparation plus élevés, conduisant à un prix de vente plus élevé pour garantir des revenus. À ce stade, le paramètre  $\alpha$  et par extension le supplément  $s$  augmentent, ce qui entraîne inévitablement une baisse des ventes. Par conséquent, le bénéfice net moyen augmente puis diminue avec un maximum tel qu'indiqué sur figure 2. Lorsque  $w_1=2$  et  $w_2=4,5$ , le bénéfice net moyen maximum est  $Q=724,66\$$  avec  $p^*=23,68\$$ ,  $u^*=1,14$  et  $\alpha^*=0,035$ .



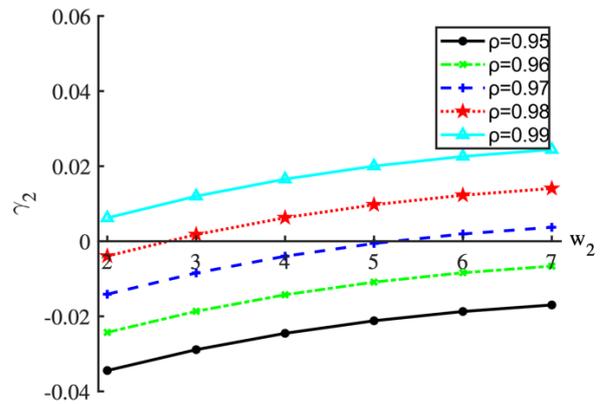
**Figure 2. Profil du profit moyen en fonction de la durée de la seconde période de garantie**

### 5.2 Expériences numériques pour le modèle 2.

Pour le modèle 2, nous utilisons la méthode mathématique pour fournir aux clients des lignes directrices pour mieux choisir la politique de garantie. Rappelons que pour le modèle 2, au moment de décider du choix de la garantie, le fabricant révèle le prix  $p$ , le coût du supplément  $s$ , et les longueurs des périodes de garantie  $w_1$  et  $w_2$  au consommateur.

Selon la Proposition 2, la valeur de  $\gamma_2$  est fonction de  $w_1$ ,  $w_2$ , et  $\rho$ , de sorte que les clients peuvent décider quelle stratégie adopter. Si  $s/p > \gamma_2$  (i.e.,  $\Delta > 0$ ) alors il est plus rentable pour les clients d'acheter un nouveau produit sans garantie à un prix bas plutôt que de payer le supplément pour un remplacement par un produit neuf. La figure 3 ci-dessous est générée pour  $w_1=2$ . Elle représente le seuil de décision pour chaque valeur du paramètre  $\rho$ .

Dans la figure 3, le cas où  $\gamma_2 < 0$  n'est pas considéré car  $\alpha = s/p$  sera toujours supérieur à 0. Différentes valeurs de  $w_2$  et  $\rho$  donneront des valeurs différentes de  $\gamma_2$ . Plus le coût de la garantie de base est élevé ( $\rho$  élevé) et plus la courbe de seuil est élevée. Lorsque la valeur de  $\alpha$  est au-dessus de la courbe seuil, les consommateurs doivent acheter le produit sans garantie, autrement, ils devraient payer la prime supplémentaire pour un remplacement par du neuf. La valeur de  $\gamma_2$  augmente avec l'augmentation de la deuxième période de garantie, ce qui signifie que plus la deuxième période de garantie est longue et plus les clients ont intérêt à acheter les produits neufs sans garantie. D'autre part, plus  $\rho$  est élevé et plus les consommateurs sont susceptibles de payer le supplément.



**Figure 3. Profil du seuil de décision en fonction de la durée de la seconde période de garantie**

## 6 CONCLUSION

Cet article a présenté le développement et l'optimisation de deux modèles mathématiques pour la détermination de la politique optimale de garantie combinée à offrir lorsque des produits remanufacturés ou des produits neufs sont utilisés pour des remplacements du point de vue du vendeur et selon la perspective l'acheteur. Lorsqu'un produit est endommagé au cours de la deuxième période de garantie, le client a deux options : payer un supplément pour obtenir un nouveau produit, ou obtenir un produit remanufacturé gratuitement en remplacement. Le premier modèle mathématique a été développé du point de vue des vendeurs pour maximiser leur profit total moyen du fabricant. Le deuxième modèle a traité de la maximisation de la durée de possession moyenne du produit par l'acheteur. Les expériences numériques qui ont été menées ont montré que des décisions optimales en matière de politique de garantie peuvent être prises.

Les extensions futures incluent le développement d'une approche analytique de résolution optimale du premier modèle obtenu et la considération de politiques hybrides de garantie plus complexes. De même, le développement de modèles de garantie bidirectionnelle pour des systèmes multi-composants remis en état avec des considérations d'incertitude au niveau de la disponibilité des pièces de rechange constitue une perspective de recherche novatrice.

## 7 RÉFÉRENCES

- Liu, Z., Diallo, C., Chen, J., & Zhang, M. (2020). Optimal pricing and production strategies for new and remanufactured products under a non-renewing free replacement warranty. *International Journal of Production Economics*, 226, 107602.
- Khatab, A., Diallo, C., & Sidibe, I. B. (2017). Optimizing upgrade and imperfect preventive maintenance in failure-prone second-hand systems. *Journal of Manufacturing Systems*, 43, 58-78.
- Blischke, W., & Murthy, D. N. P. (1996). Statistical techniques for warranty cost analysis. In *Product Warranty Handbook* (pp. 191-230). New York, NY: Marcel Dekker.
- Murthy, D. N. P., & Djameludin, I. (2002). New product warranty: A literature review. *International Journal of Production Economics*, 79(3), 231-260.
- Chukova, S., & Shafiee, M. (2013a). One-dimensional warranty cost analysis for second-hand items: an overview. *International Journal of Quality & Reliability Management*.

- 30(3), 239–255.
- Shafiee, M., & Chukova, S. (2013b). Maintenance models in warranty: A literature review. *European Journal of Operational Research*, 229(3), 561-572.
- Yun, W. Y., Murthy, D. N. P., & Jack, N. (2008). Warranty servicing with imperfect repair. *International Journal of Production Economics*, 111(1), 159-169.
- Chari, N. (2015). *Thematic development of recovery, remanufacturing, and support models for sustainable supply chains*. PhD Thesis, Dalhousie University.
- Diallo, C., Venkatadri, U., Khatab, A., & Bhakthavatchalam, S. (2018). Optimizing combination warranty policies using remanufactured replacement products from the seller and buyer's perspectives. In *Operations Research and Enterprise Systems: 6th International Conference, ICORES 2017, Porto, Portugal, February 23–25, 2017, Revised Selected Papers 6* (pp. 224-239). Springer International Publishing.
- Alqahtani, A. Y., & Gupta, S. M. (2017). Warranty as a marketing strategy for remanufactured products. *Journal of Cleaner Production*, 161, 1294-1307.
- Chari, N., Diallo, C., Venkatadri, U., & Khatab, A. (2016). Modeling and analysis of a warranty policy using new and reconditioned parts. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 32(4), 539-553.
- Diallo, C., Venkatadri, U., Khatab, A., & Bhakthavatchalam, S. (2017). State of the art review of quality, reliability, and maintenance issues in closed-loop supply chains with remanufacturing. *International Journal of Production Research*, 55(5), 1277-1296.
- Su, C., & Wang, X. (2016). Optimal upgrade policy for used products sold with two-dimensional warranty. *Quality and Reliability Engineering International*, 32(8), 2889-2899.
- Rahman, A., & Chattopadhyay, G. N. (2004). Lifetime warranty policies: complexities in modelling and potential for industry application. *The Proceedings of the APIEM Dec 2004*.
- Chattopadhyay, G., & Rahman, A. (2008). Development of lifetime warranty policies and models for estimating costs. *Reliability Engineering & System Safety*, 93(4), 522-529.
- Wu, S., & Longhurst, P. (2011). Optimising age-replacement and extended non-renewing warranty policies in lifecycle costing. *International Journal of Production Economics*, 130(2), 262-267.
- Lo, H. C., & Yu, R. Y. (2013). A study of quality management strategy for reused products. *Reliability Engineering & System Safety*, 119, 172-177.
- Jalali Naini, S. G., & Shafiee, M. (2011). Joint determination of price and upgrade level for a warranted second-hand product. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 54, 1187-1198.
- Chari, N., Diallo, C., & Venkatadri, U. (2013). Optimal unlimited free-replacement warranty strategy using reconditioned products. *International Journal of Performability Engineering*, 9(2), 191.
- Kim, D. K., Lim, J. H., & Park, D. H. (2015). Optimal maintenance level for second-hand product with periodic inspection schedule. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 31(3), 349-359.
- Lim, J. H., Kim, D. K., & Park, D. H. (2019). Maintenance optimization for second-hand products following periodic imperfect preventive maintenance warranty period. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 35(4), 1077-1089.
- Dai, A., Wei, G., Wang, D., He, Z., & He, S. (2021). The opportunity study of PM strategy for second-hand products sold with a two-dimensional warranty. *Reliability Engineering & System Safety*, 214, 107699.
- Diallo, C., Ait-Kadi, D., & Venkatadri, U. (2014). Reliability analysis and optimal mixture strategy for a lot composed of new and reconditioned systems. *International Journal of Performability Engineering*, 10(6), 557.
- Yeh, R. H., Chen, G. C., & Chen, M. Y. (2005). Optimal age-replacement policy for nonrepairable products under renewing free-replacement warranty. *IEEE Transactions on Reliability*, 54(1), 92-97.
- Yeh, R. H., Lo, H. C., & Yu, R. Y. (2011). A study of maintenance policies for second-hand products. *Computers & Industrial Engineering*, 60(3), 438-444.
- Glickman, T. S., & Berger, P. D. (1976). Optimal price and protection period decisions for a product under warranty. *Management Science*, 22(12), 1381-1390.
- Montgomery, D. C., Peck, E. A., & Vining, G. G. (2012). *Introduction to Linear Regression Analysis*. Hoboken, New Jersey: A John Wiley & Sons. Inc.[Google Scholar].