Université du Québec
à Trois-Rivières
Savoir. Surprendre.

Les fonctions de puissances Φ-généralisées et leurs applications

Mémoire

Mathieu Ouellet

Maîtrise en mathématiques et informatique appliquées
Maître ès sciences (M.Sc.)

Québec, Canada

© Mathieu Ouellet, 2019

Table des matières

Table des matières iii

Liste des figures iv

Remerciements v

Introduction 1

1 Intégrales itérées de Chen 3
1.1 L'intégrale itérée 4
1.2 Le « shuffle » produit 7
1.3 Un cadriciel plus général 9
1.4 Alphabet à deux éléments 14
1.5 Retour sur l'intégrale itérée 16

2 Théorie de Sturm-Liouville 19

3 Les séries de puissances spectrales 41
3.1 Le problème spectral 46
3.2 Le cas de l'équation de Schrödinger 47
3.3 Particule dans une boîte à une dimension 49

4 Les puissances Φ-généralisées 57
4.1 Définitions et propriétés 57
4.2 Retour sur les intégrales itérées 64
4.3 La trigonométrie Φ-généralisée 68

5 Les séries de Taylor Φ-généralisées 77

6 La composition de Volterra des fonctions de puissances généralisées 87
6.1 Application aux polynômes généralisés 90
6.2 Application à l'équation de Schrödinger 93

Conclusion 95

Bibliographie 97

Liste des figures

4.1 Fonctions Φ-trigonométriques pour le cas $\Phi \equiv (1 + 0.1x)^2$. Ce cas particulier peut être vu comme une perturbation du cas standard $\Phi \equiv 1$. On constate que les fonctions agissent initialement comme les fonctions trigonométriques standards avant d'être affectées par un amortissement important. 72

4.2 Espace de phases des fonctions Φ-trigonométriques pour $\Phi \equiv (1 + 0.1x)^2$. . . . 72

4.3 Fonctions Φ-trigonométriques pour le cas $\Phi \equiv (1+x)^2$. Ce cas particulier montre une perturbation de plus grande amplitude. 73

4.4 Espace de phases des fonctions Φ-trigonométriques pour $\Phi \equiv (1 + x)^2$. 73

4.5 Fonctions Φ-trigonométriques pour le cas $\Phi \equiv \sqrt{\cosh(x)}$. Ce cas particulier montre une large perturbation. 74

4.6 Espace de phases des fonctions Φ-trigonométriques associées pour $\Phi \equiv \sqrt{\cosh(x)}$. L'aspect oscillatoire est préservé, mais l'amortissement est grand et la période de rotation est fortement augmentée. 74

4.7 Fonctions Φ-trigonométriques dans le cas où l'on a une fonction de Heaviside qui effectue un saut à $x = 8$ et à $x = 16$. L'aspect sinusoïdal est préservé, mais un changement de phase et d'amplitude est présent à chaque saut de la fonction. 75

4.8 Espace de phases des fonctions Φ-trigonométriques associées pour pour une fonction de Heaviside qui effectue un saut à $x = 8$ et à $x = 16$. 75

Remerciements

Ce mémoire n'aurait pas été possible sans l'intervention d'un grand nombre de personnes. Je tiens d'abord à remercier mon directeur de recherche, monsieur Sébastien Tremblay, sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour. Ses idées et son expérience ont été d'une aide très précieuse. La flexibilité offerte par monsieur Tremblay dans la réalisation de mes activités m'a permis d'ouvrir mes horizons et de découvrir une multitude de domaines tant en mathématique, en physique et même en biologie. Je souhaite aussi remercier mes proches qui ont su me soutenir durant cette période et m'aider à atteindre mes objectifs. Mes remerciements vont aussi à tous les professeurs qui m'ont aidé dans ce parcours et m'ont préparé et assisté pour atteindre la prochaine étape, je pense ici à madame Nadia Ghazzali, à monsieur Marc Germain et à monsieur Mhamed Mesfioui. Je tiens aussi à remercier madame Alexandra Elbakyan pour sa précieuse aide dans l'obtention d'articles scientifiques indisponibles dans notre établissement. Finalement, je tiens à remercier le Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie, le Fonds de Recherche du Québec – Nature et technologies, l'Institut de Recherches en Santé du Canada, la Fondation de l'Université du Québec à Trois-Rivières ainsi que l'Institut des Sciences Mathématiques du Québec pour avoir financé mes recherches ainsi que mon parcours académique.

Introduction

Le présent mémoire représente une partie des résultats obtenus au cours de ma maîtrise. Il consiste en une étude sommaire des fonctions de puissances Φ-généralisées, des fonctions complexes à variable réelle sur un intervalle $[a, b]$. Ces fonctions sont engendrées par une représentation, relativement nouvelle (2008) [16], des solutions du problème de Sturm-Liouville en une série de puissances spectrales du problème.

Ces fonctions nommées puissances Φ-généralisées sont présentées dans ce mémoire. Ces fonctions généralisent les puissances de la forme $(x - x_0)^n$ pour $n \geq 0$. Plusieurs théories classiques possèdent donc un analogue en termes de ces fonctions. De plus, les propriétés de ces fonctions sont fortement liées au concept de supersymétrie quantique selon les recherches effectuées durant cette maîtrise. Cependant, afin de donner un angle au mémoire ce sujet ne fut pas inclus.

Le premier chapitre de ce mémoire présente la théorie des intégrales itérées et montre une méthode de représentation de ces intégrales en termes d'opérateur sur des mots. Le chapitre suivant vise à donner au lecteur une base solide sur les problèmes de Sturm-Liouville et sur plusieurs théorèmes reliés qui seront d'intérêt dans les chapitres subséquents. Le chapitre 3 présente les circonstances historiques de la définition des puissances spectrales et leurs utilités pour représenter les solutions des problèmes de Sturm-Liouville. Le chapitre 4 présente les puissances Φ-généralisées, soit le sujet principal du présent mémoire. Leur représentation en intégrales itérées et leurs propriétés sont présentées et plusieurs identités sont obtenues. Finalement, une construction similaire aux fonctions trigonométriques est présentée ainsi que ses implications. Le chapitre 5 s'intéresse plus particulièrement à la construction de séries de Taylor Φ-généralisées. Ces séries peuvent être utilisées au même titre que les séries de puissances usuelles. Finalement, le dernier chapitre s'interroge sur l'existence d'un produit similaire à la multiplication de polynôme standard pour les fonctions de puissances Φ-généralisées. Une application à l'équation de Schrödinger est alors présentée.

Un article traitant des résultats obtenus est en cours de publication une prépublication est disponible sur l'archive ouverte de prépublications électroniques arXiv [24] disponible à l'adresse suivante : arXiv:1905.07509.

Chapitre 1

Intégrales itérées de Chen

Ce chapitre traitera principalement du concept d'intégrales itérées. Son traitement permettra d'asseoir l'analyse des objets d'intérêt du présent mémoire que sont les fonctions de puissances Φ-généralisées. Le concept d'intégrales itérées peut être historiquement motivé par l'étude de la méthode de résolution de systèmes d'équations différentielles ordinaires de Picard. Cette méthode sera brièvement abordée ici afin de mettre en contexte la définition d'intégrales itérées.

Soit $A(t)$ une matrice carrée $n \times n$ de fonction continue définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}$, et le système d'équations différentielles

$$\frac{d}{dt}X(t) = A(t)X(t), \quad t \in U, \tag{1.1}$$

avec les conditions initiales $X(t_0) = X_0$, où $t_0 \in U$ et X_0 est un vecteur $n \times 1$. Il est possible de démontrer (voir Chapitre 2) que ce système d'équations différentielles ordinaires est équivalent à l'équation intégrale

$$X(t) - X_0 = \int_{t_0}^{t} A(s)X(s)ds. \tag{1.2}$$

Pour résoudre le système, la méthode de Picard utilise une suite d'approximations successives de la solution à l'équation. Soit $X_0(t)$ la fonction constante de valeur X_0 et $X_n(t)$ définie récursivement tel que

$$X_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)X_n(s)ds, \qquad n > 0, \tag{1.3}$$

où $t_0 \leq t \in U$. Si la limite

$$X(t) = \lim_{m\to\infty} \left(X_0(t) + X_0(t) \sum_{n=1}^{m} X_n(t) \right) \tag{1.4}$$

existe, elle est solution de l'équation originale (1.1). Par exemple,

$$X_1(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)ds,$$
$$X_2(t) = \int_{t_0}^{t} A(s) \int_{t_0}^{s} A(s')ds'ds.$$

Il est évident que sur un ensemble borné et fini $K \subset U$ nous avons la limite supérieure suivante en remplaçant l'intégrale par la valeur maximale de la matrice par le volume d'intégration

$$X_n(t) \leq \sup_{s \in K} \|A(s)\|^n \frac{(t-t_0)^n}{n!}. \tag{1.5}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0(t) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t)\right) \\ &\leq X_0(t) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{s \in K} \|A(s)\|^n \frac{(t-t_0)^n}{n!}\right) \end{aligned}$$

qui est convergent pour $\sup_{s \in K} \|A(s)\|^n < \infty$ et pour $(t - t_0) < \infty$. La solution est alors donnée par

$$X(t) \quad = X_0(t) \left(1 + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} X_n(t)\right). \tag{1.6}$$

1.1 L'intégrale itérée

L'intégration successive obtenue à l'équation (1.3) est intéressante en soi. Le concept d'intégrale itérée généralise cette construction à un ensemble de matrices (ou fonctions) $\{A_i\}^n$ au lieu d'une seule matrice (ou de fonctions) A. Cette section est partiellement inspirée de l'article de Bowman et Bradley [4]. L'étude des intégrales itérées se fait plus facilement au travers du concept des formes différentielles permettant une écriture plus simple. La description des 1-formes seules sera nécessaire.

Définition 1.1.0.1 (1-forme) *Une 1-forme sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est une expression de la forme*

$$w = \sum_{i=1}^{n} F_i(\vec{x}) dx_i,$$

où les $F_i(\vec{x})$ sont des fonctions dans $\mathbb{R}$ sur l'ouvert.

Cette définition peut sembler une simple notation, mais permet des constructions puissantes en géométrie différentielle. Ces constructions ne seront pas de grand intérêt pour le présent mémoire. Cependant, cette définition nous permettra de considérer l'intégrale d'une fonction f sur $[a, b]$ $\int_a^b f_i(t_i)dt_i$, comme l'intégrale $\int_a^b w_i$. Sous cette notation l'intégrale itérée se définira plus proprement exposant plus facilement le comportement itératif du processus.

Définition 1.1.0.2 (Intégrale itérée) *Soit $[a,b]$ un interval borné dans $\mathbb{R}$ et $W = \{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un ensemble de 1-formes indexées dans $\mathbb{R}$, alors l'intégrale itérée peut se définir itérativement de la façon suivante*

$$\int_a^b w_1 = \int_a^b w_1(t)dt,$$
$$\int_a^b w_1 w_2 = \int_a^b w_1(t)dt \int_a^t w_2(s)ds,$$
$$\vdots$$
$$\int_a^b w_1 \cdots w_r = \int_a^b w_1 \cdots w_{r-1} \int_a^t w_r(t)dt.$$

L'intégrale pour $r = 0$ est fixéesà 1, $\forall x \in \mathbb{R}$ de façon à simplifier la notation. De façon plus générale, le parcours d'intégration peut être pris comme un chemin paramétrique lisse sur une variété ; dans le présent mémoire seul le cas unidimensionnel dans $\mathbb{R}$ sera d'intérêt. Afin de diminuer l'ambiguïté, l'intégrale commence par la 1-forme la plus à droite. La profondeur d'une intégrale itérée est définie comme la cardinalité de l'ensemble W notée $|W|$.

Dans un objectif de rendre l'écriture encore plus simple, le symbole de multiplication sera utilisé. Soit un ensemble W de 1-formes indexése $\{w_i\}_{i=1}^n$, alors l'intégrale itérée de W sur $[a,b]$, peut s'écrire

$$\int_a^b w_1 w_2 \cdots w_n = \int_a^b \prod_{j=1}^n w_j.$$

Exemple 1.1.0.1 *Soit un suite de nombres entiers et positifs de longueur k $(s_i)_{i=1}^k \in (\mathbb{N}^+)^k$ alors la fonction zêta multiple peut s'écrire sous sa forme usuelle exempte d'intégrales itérées comme*

$$\zeta(s_1, s_2, \ldots, s_k) := \sum_{n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 0} \prod_{j=1}^k n_j^{-s_j}.$$

Cette fonction admet la représentation par intégrale intégrée suivante [34]

$$\zeta(s_1, s_2, \ldots, s_k) = \int_0^1 \prod_{j=1}^k {w_1}^{s_j - 1} w_2,$$

où w_1, w_2 sont des 1-formes telles que $w_1 = dt/t$ et $w_2 = dt/(1-t)$. L'intégrale itérée est alors de profondeur $\sum_{j=1}^k s_j$. Par exemple, pour $\zeta(2,1)$ de profondeur trois, il est possible d'écrire la fonction à l'aide de trois intégrales de telle sorte que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 w_1 w_2 w_2 &= \int_0^1 \left(\int_0^{t_1} \left(\int_0^{t_2} \frac{dt_3}{1-t_3} \right) \frac{dt_2}{(1-t_2)} \right) \frac{dt_1}{t_1} \\
&= -\int_0^1 \left(\int_0^{t_1} \frac{\log(1-t_2)dt_2}{(1-t_2)} \right) \frac{dt_1}{t_1} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\log^2(1-t_1)dt_1}{(t_1)} = \zeta(2,1).
\end{aligned}$$

La définition de l'intégrale itérée possède plusieurs propriétés fondamentales importantes. Quelques-unes qui seront utiles à notre étude seront présentées ici. La première question qu'on peut se poser est : qu'arrive-t-il à une intégrale itérée quelconque lorsque l'on inverse l'ordre d'intégration. Pour une intégrale simple, on trouve la propriété triviale $\int_a^b w_1 = -\int_b^a w_1$. La proposition suivante présente cette propriété.

Proposition 1.1.0.1 ([7]) *Soit $w_1, w_2, ..., w_n$ des 1-formes différentielles et soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\int_y^x w_1 w_2 ... w_n = (-1)^n \int_x^y w_n w_{n-1} ... w_1.$$

Démonstration. La preuve suivante peut être faite par induction. Considérons que $w_i = f_i(t_i)dt_i$, pour une intégrale de profondeur $n = 1$ on obtient

$$\int_a^b w_1 = (-1) \int_b^a w_1.$$

Posons maintenant que la relation est vraie pour $n - 1$ alors,

$$\int_a^b w_1 w_2 \dots w_n = \int_a^b \left(f_1(t_1) dt_1 \int_a^{t_1} w_2 \dots w_n \right).$$

Or par hypothèse d'induction,

$$\int_a^b w_1 w_2 \dots w_n = \begin{cases} -\int_a^b f_1(t) dt_1 \int_{t_1}^a w_2 \dots w_n, & n \text{ pair} \\ \int_a^b f_1(t) dt_1 \int_{t_1}^a w_2 \dots w_n, & n \text{ impair} \end{cases}$$

Ainsi nous avons que

$$\int_a^b \left(f(t) \int_t^a f(s) ds \right) dt = \int_a^b \left(f(t) \int_a^t f(s) ds \right) dt.$$

Par conséquent, on trouve,

$$\int_y^x w_1 w_2 ... w_n = (-1)^n \int_x^y w_n w_{n-1} ... w_1. \tag{1.7}$$

□

Une autre propriété bien connue de l'intégrale de Riemann est la division du chemin d'intégration de telle sorte que $\int_a^b w = \int_a^c w + \int_c^b w$ pour $a \leq c \leq b$. Il serait naturel de se demander comment cette propriété se traduit dans le cas des intégrales itérées. C'est ce que met en évidence la proposition suivante. Pour en faire la démonstration, nous avons besoin du concept de simplexe.

Proposition 1.1.0.2 ([5]) *Soit $x, y, z \in [0, 1]$ tels que $x < z < y$ alors*

$$\int_x^y w_1 \dots w_n = \sum_{i=0}^n \int_x^z w_1 \cdots w_i \int_z^y w_{i+1} \cdots w_n.$$

Démonstration. La démonstration fera appel au concept de simplexe.

Définition 1.1.0.3 (simplexe) *Soit $a, b \in [0,1]$, alors le simplexe de dimension n peut s'écrire*

$$\Delta_n(a,b) = \{(t_1, \ldots, t_n) \in [a,b] \mid t_j < t_{j+1}\}.$$

Pour une intégrale itérée de profondeur n, on peut choisir une paramétrisation de telle sorte que l'on se retrouve à intégrer sur $\Delta_n(0,1)$. L'identité suivante

$$\Delta_n(0,1) \equiv \bigcup_{i=0}^{n} \Delta_i\left(0, \tfrac{1}{2}\right) \times \Delta_{n-i}\left(\tfrac{1}{2}, 1\right) \tag{1.8}$$

permet d'écrire

$$\int_{\Delta_n(0,1)} w_1 \ldots w_n = \sum_{i=0}^{n} \int_{\Delta_i(0,\frac{1}{2})} w_1 \cdots w_i \int_{\Delta_{n-i}(\frac{1}{2},1)} w_{i+1} \cdots w_n.$$

□

Ces deux propriétés sont à la base de plusieurs astuces utilisées lorsque l'on travaille avec les intégrales itérées.

1.2 Le « shuffle » produit

Dans la section précédente, il était question de séparer le domaine d'intégration afin de « simplifier » l'intégrale. Ici, il sera question de savoir comment il est possible de décomposer une intégrale de profondeur n en sommes d'intégrales de profondeur inférieure à n. Pour ce faire, il sera nécessaire de construire un nouveau produit le *shuffle produit*.

Un $(r,s)-$shuffles est équivalent à un mélange à queue d'aronde de deux jeux de cartes comportant respectivement r et s cartes. Ainsi, l'ordre relatif de chacun des deux ensembles de cartes est préservé dans le paquet final, mais l'ordre d'insertion des paquets est arbitraire. Par exemple, $\{2\clubsuit, 3\heartsuit, J\spadesuit, K\diamondsuit, 5\clubsuit\}$ est un $(r,s)-$*shuffles* possible des paquets $\{3\heartsuit, 5\clubsuit\}$ et $\{2\clubsuit, J\spadesuit, K\diamondsuit\}$. L'ensemble des $(r,s)-$*shuffles* possibles pour ces deux paquets est, pour l'exemple, donné par

$$\{\{3,5,2,J,K\}, \{3,2,5,J,K\}, \{3,2,J,5,K\}, \{3,2,J,K,5\}, \{2,3,5,J,K\},$$
$$\{2,3,J,5,K\}, \{2,3,J,K,5\}, \{2,J,3,5,K\}, \{2,J,3,K,5\}, \{2,J,K,3,5\}\}.$$

D'une façon plus rigoureuse, nous pouvons définir un $(r,s)-$*shuffles* de la façon suivante.

Définition 1.2.0.1 *Soit σ une permutation de $r+s$ lettres. L'ensemble des $(r,s)-$shuffles sur $r+s$ lettres consiste en l'ensemble des σ tel que*

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(1) < \cdots < \sigma^{-1}(r) \\ \text{et} \quad \sigma^{-1}(r+1) < \cdots < \sigma^{-1}(r+s). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Les (r,s)-shuffles sont la base même du *shuffle produit* noté $\sqcup\!\sqcup$, un opérateur commutatif important dans l'étude des intégrales itérées, défini de la façon suivante.

Définition 1.2.0.2 (*shuffle produit*) *Soit $\{w_i\}_{i=1}^n$ des 1-formes sur $\mathbb{R}$, le shuffle produit est défini comme*

$$w_1 \cdots w_r \sqcup\!\sqcup w_{r+1} \cdots w_{r+s} = \sum_{\sigma}{}' w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(r)}, \tag{1.10}$$

où $\sum_\sigma{}'$ dénote la somme sur l'ensemble des $(r,s)-$shuffles que nous noterons $\mathrm{Shuff}(r,s)$.

Par exemple, nous avons que

$$\begin{aligned} w_1 \sqcup\!\sqcup w_2 &= w_1 w_2 + w_2 w_1, \\ w_1 \sqcup\!\sqcup w_2 w_3 &= w_1 w_2 w_3 + w_2 w_1 w_3 + w_2 w_3 w_1. \end{aligned}$$

L'utilité du concept de *shuffle produit* provient, entre autres, de l'identité suivante mettant en relation le *shuffle produit* et les intégrales par partie.

Proposition 1.2.0.1 (Intégration du *shuffle produit*) *Soit $a = f(t)dt$, $b = g(t)dt$ et u, v deux autres 1-formes sur $\mathbb{R}$, alors l'intégrale du shuffle produit suit l'identité suivante*

$$\int_x^y (au \sqcup\!\sqcup bv) = \left(\int_x^y f(t) \int_x^t u dt\right) \left(\int_x^y g(t) \int_x^t v dt\right). \tag{1.11}$$

Démonstration. Posons $F(y)$ tel que

$$F(y) = \left(\int_x^y f(t) \int_x^t u dt\right) \left(\int_x^y g(t) \int_x^t v dt\right).$$

En écrivant $F(y) = \int_x^y F'(s) ds$ on trouve que

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_x^y \left(f(s) \int_x^s u\right) \left(\int_x^s g(t) \int_x^t v dt\right) ds + \int_x^y g(s) \left(\int_x^s f(t) \int_x^t u dt\right) \int_x^s v ds \\ &= \int_x^y a(u \sqcup\!\sqcup bv) + \int_x^y b(au \sqcup\!\sqcup v). \end{aligned}$$

□

1.3 Un cadriciel plus général

D'une façon plus générale, nous emploierons le *shuffle produit* sur des structures beaucoup plus abstraites. Soit A un ensemble fini nous noterons par A^* le monoïde généré par les séquences finies contenant zéro ou plus éléments de A (free monoid of A). En considérant A comme un alphabet, les éléments de A^* son équivalent aux mots formés par un nombre fini de lettres. L'opération agissant sur cet ensemble est la concaténation $a \cdot b = ab$ notée de façon multiplicative. Les éléments de A ne possédant pas d'inverse, A^* ne peut être considéré comme un groupe. Il possède cependant une unité multiplicative que nous noterons par 1. Par exemple,

$$A := w_1, w_2$$
$$A^* := w_1, w_2, w_1w_2, w_2w_1, w_1w_1, \cdots, w_1w_2w_1 \cdots$$

Par extension linéaire de l'ensemble A, l'ensemble $\mathbf{Q}\langle A\rangle$ est obtenu, où la notation $\langle A\rangle$ est utilisée pour dénoter le monoïde généré par les éléments de A. Il est composé des combinaisons linéaires rationnelles des éléments de A^*. C'est un anneau polynomial non commutatif avec comme indéterminés les éléments de A et avec comme unité multiplicative le mot vide 1. Le *shuffle produit* peut alors être défini comme

$$1 \sqcup\!\sqcup w = w \sqcup\!\sqcup 1 = w, \qquad \forall w \in A^*, \tag{1.12}$$
$$au \sqcup\!\sqcup bv = a(u \sqcup\!\sqcup bv) + b(au \sqcup\!\sqcup v), \quad \forall a, b \in A, \forall u, v \in A^* \tag{1.13}$$
$$ua \sqcup\!\sqcup vb = (u \sqcup\!\sqcup vb)a + (ua \sqcup\!\sqcup v)b, \quad \forall a, b \in A, \forall u, v \in A^*. \tag{1.14}$$

Il est facile d'étendre cette définition sur $\mathbf{Q}\langle A\rangle$. En suivant l'exemple précédent,

$$4w_1 + 2w_1w_2, 2w_2w_1 \in \mathbf{Q}\langle A\rangle$$
$$(4w_1 + 2w_1w_2) \sqcup\!\sqcup (2w_2w_1) = 8(w_1w_2w_1 + 2w_2w_1w_1)$$
$$+4(2w_1w_2w_2w_1 + w_1w_2w_1w_2 + w_2w_1w_2w_1 + 2w_2w_1w_1w_2).$$

L'ensemble $\mathbf{Q}\langle A\rangle$ muni du *shuffle produit* devient alors une $\mathbf{Q}$-algèbre commutative dénotée $\mathrm{Sh}_Q[A]$.

Définition 1.3.0.1 (Homomorphisme d'anneau) *Soit R et S deux anneaux avec unité, et A et B deux alphabets (ensembles de lettres). Alors un homomorphisme d'anneau R-linéaire $\phi : \boldsymbol{Q}\langle A\rangle \to \boldsymbol{Q}\langle B\rangle$ est une application qui préserve l'addition, la multiplication, l'unité et la linéarité telle que*

$$\begin{aligned}
\phi(u+v) &= \phi(u) + \phi(v), \forall u, v \in A^* && \textit{(addition)},\\
\phi(uv) &= \phi(u)\phi(v), \forall u, v \in A^* && \textit{(multiplication)},\\
\phi(1_R) &= 1_S && \textit{(identité)},\\
\phi(au) &= a\phi(u), \forall a \in R, \forall u \in A^* && \textit{(R-linéarité)}.
\end{aligned}$$

Définition 1.3.0.2 (antihomomorphisme d'anneau) *Soit R et S deux anneaux avec unité, et A et B des alphabets (ensembles de lettres). Alors un antihomomorphisme d'anneau R-linéaire $\phi : \boldsymbol{Q}\langle A\rangle \to \boldsymbol{Q}\langle B\rangle$ est une application qui préserve l'addition, l'unité, la linéarité et telle que*

$$\phi(uv) = \phi(v)\phi(u), \forall u, v \in A^* \quad \textit{(multiplication)}. \tag{1.15}$$

De façon évidente un anti-homomorphisme $\psi : \mathbf{Q}\langle A\rangle \to \mathbf{Q}\langle B\rangle$ où A et B sont des alphabets, induit un homomorphisme $\psi : Sh_Q[A] \to Sh_Q[B]$ de façon naturelle. Pour l'illustrer il suffit de montrer que

$$\psi(u \sqcup\!\sqcup v) = \psi(u) \sqcup\!\sqcup \psi(v), \quad u, v \in A^*. \tag{1.16}$$

Procédons par induction, nous avons d'abord que

$$\psi(1 \sqcup\!\sqcup u) = \psi(u \sqcup\!\sqcup 1) = \psi(u) = 1 \sqcup\!\sqcup \psi(u) = \psi(u) \sqcup\!\sqcup 1. \tag{1.17}$$

Nous assumerons alors que pour $a, b \in A$

$$\psi(u \sqcup\!\sqcup bv) = \psi(u) \sqcup\!\sqcup \psi(bv), \tag{1.18}$$

$$\psi(au \sqcup\!\sqcup v) = \psi(au) \sqcup\!\sqcup \psi(v). \tag{1.19}$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
\psi(au \sqcup\!\sqcup bv) &= \psi(a(u \sqcup\!\sqcup bv)) + \psi(b(au \sqcup\!\sqcup v)) \\
&= \psi(u \sqcup\!\sqcup bv)\psi(a) + \psi(au \sqcup\!\sqcup v)\psi(b) \\
&= (\psi(u) \sqcup\!\sqcup \psi(v)\psi(b))\,\psi(a) + (\psi(u)\psi(a) \sqcup\!\sqcup \psi(v))\,\psi(b) \\
&= \psi(u)\psi(a) \sqcup\!\sqcup \psi(v)\psi(b) \\
&= \psi(au) \sqcup\!\sqcup \psi(bv).
\end{aligned}$$

Dans le cas d'un homomorphisme $\phi : \mathbf{Q}\langle A\rangle \to \mathbf{Q}\langle B\rangle$, un homomorphisme d'algèbre est aussi induit de telle sorte que $\phi : \mathrm{Sh}_Q[A] \to \mathrm{Sh}_Q[B]$ de la même manière. La preuve est similaire : conséquence de la commutativité de $\sqcup\!\sqcup$. Soit A un alphabet et $X = \{X_a : a \in A\}$ un ensemble d'indéterminés ne commutant pas de taille $|A|$ indexés par les lettres de A. Soit $\mathbf{X} : \mathbf{Q}\langle A\rangle \to \mathbf{Q}\langle X\rangle$ l'isomorphisme d'anneau naturellement défini par $\mathbf{X}(a) = X_a \quad \forall a \in A$ et de la même façon, $Y = \{Y_a : a \in A\}$ est un autre ensemble d'indéterminés de taille $|A|$ et $\mathbf{Y}$ est défini de façon semblable $\mathbf{Y} : \mathbf{Q}\langle A\rangle \to \mathbf{Q}\langle Y\rangle$. De plus, nous postulerons que $X \cap Y = \emptyset$, $X = \mathbf{X}(A)$, $Y = \mathbf{Y}(A)$ et ces indéterminés sont commutatifs entre eux par hypothèse $X_aY_b = Y_bX_a \quad a, b \in A$. On peut alors définir une addition et une multiplication sur $\mathbf{Q}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ telles que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X} + \mathbf{Y})(a) &= X_a + Y_a, \quad \forall a \in A, \\
(\mathbf{XY})(a) &= X_aY_a, \quad \forall a \in A.
\end{aligned}$$

$\mathbf{Q}[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$ devient alors une $\mathbf{Q}$-algèbre commutative d'isomorphisme naturel d'anneau $\mathbf{Z}$. Par exemple, l'isomorphisme $\mathbf{Z}$ d'anneau inversant l'ordre d'apparition sur $(\mathbf{X}+\mathbf{Y})$ serait donné par

$$\mathbf{Z}(w) = (\mathbf{X}+\mathbf{Y})(a_n a_{n-1}\dots a_1) = \prod_{j=0}^{n-1}\left(X_{a_{n-j}} + Y_{a_{n-j}}\right), \tag{1.20}$$

où $w \in A^*, a_i \in A$ et $w = a_1 a_2 \cdots a_n$. La raison de l'existence de cette structure s'éclaircira sous peu. L'algèbre $(\mathrm{Sh}_Q[A])\langle X\rangle$ se construit de la même façon que $\mathbf{Q}\langle X\rangle$ en considérant les combinaisons linéaires des éléments de X avec coefficients dans $\mathrm{Sh}_Q[A]$. De la même façon, il est possible de construire le groupe $\langle\langle X,Y\rangle\rangle$. Soit G une application entre $\mathbf{Q}[\mathbf{X},\mathbf{Y}] \to (\mathrm{Sh}_Q[A])\langle\langle X,Y\rangle\rangle$ définie par

$$\mathbf{G}(\mathbf{Z}) := \sum_{w\in A^*} w\mathbf{Z}(w). \tag{1.21}$$

Par exemple, avec $A = \{a,b\}$, alors

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(\mathbf{Z}) := 1 &+ a(X_a+Y_a) + b(X_b+Y_b) + aa(X_a+Y_a)^2 + bb(X_b+Y_b)^2\\ &+ ab(X_a+Y_a)(X_b+Y_b) + ba(X_b+Y_b)(X_a+Y_a) + \cdots.\end{aligned}$$

De façon similaire,

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(\mathbf{X}) &:= \sum_{w\in A^*} w\mathbf{X}(w)\\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{a\in A} aX_a\right)^n.\end{aligned}$$

Par exemple, toujours avec $A = \{a,b\}$ on obtient

$$G(\mathbf{X}) = 1 + aX_a + bX_b + aaX_a^2 + bbX_b^2 + abX_aX_b + baX_bX_a + \cdots.$$

Cette application est un analogue non commutatif de la fonction exponentielle. Le théorème suivant mettra de l'avant cette similarité.

Théorème 1.3.1 ([4],[7]) *L'application $G : \boldsymbol{Q}[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}] \to (\mathrm{Sh}_Q[A]\langle\langle X,Y\rangle\rangle$ définie par (1.21) possède la propriété*

$$G(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) = G(\boldsymbol{X}) \sqcup G(\boldsymbol{Y}). \tag{1.22}$$

Démonstration. Par définition, on a

$$G(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) = \sum_{w\in A^*} w(\mathbf{X}+\mathbf{Y})(w).$$

Le côté droit peut se développer comme

$$\begin{aligned} G(\mathbf{X}) \sqcup\!\sqcup G(\mathbf{Y}) &= \sum_{u\in A^*} u\mathbf{X}(u) \sqcup\!\sqcup \sum_{v\in A^*} v\mathbf{Y}(v) \\ &= \sum_{u,v\in A^*} (u \sqcup\!\sqcup v)\mathbf{X}(u)\mathbf{Y}(v). \end{aligned}$$

La somme peut être divisée sur la taille des mots du mot résultant de $(u \sqcup\!\sqcup v)$ et sur la somme de toutes les combinaisons de n lettres $\sum_{n\geq 0}\sum_{a_1,\ldots,a_n\in A} H$, où H doit être remplacé par toutes les façons d'assembler un mot de longueur n en le divisant en deux paquets $a \sqcup\!\sqcup b$ et en faisant suivre les indéterminés correspondants. Chacune des façons, pour un un mot de longueur $n = k + m$ tel que le premier mot soit de longueur k et le second de longueur m peut s'écrire $\left(\prod_{j=1}^{k} a_j \sqcup\!\sqcup \prod_{j=k+1}^{n} a_j\right)$. Les indéterminés associés s'expriment comme $\prod_{j=1}^{k} X_{a_j} \prod_{j=k+1}^{n} Y_{a_j}$. Une fois regroupé

$$\sum_{u,v\in A^*} (u \sqcup\!\sqcup v)\mathbf{X}(u\mathbf{Y}(v) = \sum_{n\geq 0} \sum_{a_1,\ldots,a_n\in A} \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{j=1}^{k} a_j \sqcup\!\sqcup \prod_{j=k+1}^{n} a_j\right) \prod_{j=1}^{k} X_{a_j} \prod_{j=k+1}^{n} Y_{a_j}.$$

Le terme $\left(\prod_{j=1}^{k} a_j \sqcup\!\sqcup \prod_{j=k+1}^{n} a_j\right)$ peut s'écrire $\sum_{\sigma\in\text{Shuff(k,n-k)}} \prod_{r=1}^{n} a_{\sigma(r)}$, où $Shuff(k, n-k)$ est le sous-ensemble des permutations sur n respectant les propriétés du shuffle de deux sous-ensembles de dimensions k et $n-k$. L'expression peut ainsi être raffinée telle que

$$\sum_{u,v\in A^*} (u \sqcup\!\sqcup v)\mathbf{X}(u)\mathbf{Y}(v) = \sum_{n\geq 0} \sum_{a_1,\ldots,a_n\in A} \sum_{k=0}^{n} \sum_{\sigma\in\text{Shuff(k,n-k)}} \prod_{r=1}^{n} a_{\sigma(r)} \prod_{j=1}^{k} X_{a_j} \prod_{j=k+1}^{n} Y_{a_j}.$$

Pour chaque $\sigma \in \text{Shuff}(k, n-k)$, les éléments $a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}$ traversent des éléments de A. En posant $b_j = a_{\sigma(j)}$, on peut extraire $\prod_{r=1}^{n} a_{\sigma(r)}$ tel que

$$= \sum_{n\geq 0} \sum_{a_1,\ldots,a_n\in A} \left(\prod_{r=1}^{n} b_r\right) \sum_{k=0}^{n} \sum_{\sigma\in\text{Shuff(k,n-k)}} \prod_{j=1}^{k} X_{b_{\sigma^{-1}(j)}} \prod_{j=k+1}^{n} Y_{b_{\sigma^{-1}(j)}}.$$

Or $X_a Y_b = Y_b X_a$, par conséquent

$$\sum_{\sigma\in\text{Shuff(k,n-k)}} \prod_{j=1}^{k} X_{b_{\sigma^{-1}(j)}} \prod_{j=k+1}^{n} Y_{b_{\sigma^{-1}(j)}} = \prod_{j=1}^{n} \left(X_{b_j} + Y_{b_j}\right).$$

Ainsi, on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{u,v\in A^*} (u \sqcup\!\sqcup v)\mathbf{X}(u\mathbf{Y}(v) &= \sum_{n\geq 0} \sum_{a_1,\ldots,a_n\in A} \left(\prod_{r=1}^{n} b_r\right) \prod_{j=1}^{n} \left(X_{b_j} + Y_{b_j}\right) \\ &= \sum_{w\in A^*} w(\mathbf{X}+\mathbf{Y})(w). \end{aligned}$$

La dernière égalité est une conséquence du fait que chacun des shuffles contient $\binom{n}{k}$ combinaisons possibles et donc que la dernière somme sur k contient

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{éléments.}$$

Or, ces 2^n éléments sont précisément ceux obtenus par le produit $(X_{b_1} + Y_{b_1}) \cdots (X_{b_n} + Y_{b_n})$.

□

Au même titre que pour un produit de mots, il est possible de définir un exposant par shuffle tel que

$$(w)^{\sqcup\!\sqcup n} = \underbrace{w \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup w}_{n \text{ fois}}. \tag{1.23}$$

Remarque *L'application définie en (1.21) est par conséquent un analogue non commutatif de la fonction exponentielle. Cet analogue devient plus clair en l'écrivant sous la forme*

$$G(X) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{a \in A} a X_a \right)^{\sqcup\!\sqcup n}.$$

La théorie précédemment développée permet de construire une structure analogue à la fonction exponentielle pour les intégrales itérées. Cette application est obtenue en utilisant un alphabet de 1-formes et en intégrant (1.21). Par exemple en posant $A = \{a = dt\}$ et $X_a = x$ on trouve alors que $\int_0^x G(X) = e^x$. On obtient le théorème suivant.

Théorème 1.3.2 ([5],[6]) *Soit A un alphabet de 1-formes et $[x, y] \in \mathbb{R}$, alors l'application*

$$G_x^y(X) = \sum_{w \in A^*} \int_x^y w \boldsymbol{X}(w) \tag{1.24}$$

possède la propriété

$$G_x^y(X) = G_z^y G_x^z, \qquad y \leq z \leq x. \tag{1.25}$$

Démonstration. La somme sur $w \in A^*$ peut être transformée par la somme sur les mots de longueur p de telle sorte que

$$G_x^y(X) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{w_1, \ldots w_p \in A} \int_x^y w_1 \ldots w_p X_{w_1} \ldots X_{w_p}.$$

La multiplication $G_z^y G_x^z$ peut aussi s'écrire sous cette forme telle que

$$G_z^y G_x^z(X) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{w_1, \ldots w_p \in A} c(w_1, \ldots, w_p) X_{w_1} \ldots X_{w_p},$$

où $c(w_1, \ldots, w_p)$ est le terme contenant les intégrales multipliées et est donné par

$$c(w_1, \ldots, w_p) = \int_z^y w_1 \ldots w_p + \int_z^y w_1 \ldots w_{p-1} \int_x^z w_p + \cdots + \int_x^z w_1 \ldots w_p.$$

Or conséquence de (1.1.0.2), on obtient

$$\begin{aligned} c(w_1, \ldots, w_p) &= \sum_{k=0}^{p} \left(\int_z^y \prod_{j=0}^{k} w_j \right) \left(\int_x^z \prod_{j=p-k}^{p} w_j \right) \\ &= \int_x^y w_1 \ldots w_p. \end{aligned}$$

Ainsi $G_z^y(X) G_x^z(X) = G_x^y(X)$. □

Par conséquent, on a que pour $X_a = x$ et $A = \{a = dt\}$ on retrouve que $e^{x+y} = e^x e^y$. Une question intéressante et importante est l'existence de l'inverse de $G(X)$ dans le contexte général de (1.22).

Théorème 1.3.3 ([25]) *Soit $R : \boldsymbol{Q}\langle A \rangle \to \boldsymbol{Q}\langle A \rangle$ un antihomomorphisme induit par $R(a) = a$ $\forall a \in A$ tel que*

$$R\left(\prod_{j=1}^{n} a_j \right) = \prod_{j=1}^{n} a_{n-j+1}, \qquad \forall a_1, \ldots, a_n \in A. \tag{1.26}$$

R est donc une involution qui inverse l'ordre des lettres dans les mots. Soit A un alphabet, $X = \{X_a : a \in A\}$ un ensemble d'indéterminés et $\mathbf{X} : \mathbf{Q}\langle A \rangle \to \mathbf{Q}\langle X \rangle$ un isomorphisme d'anneau induit par $\mathbf{X}(a) = X_a, \quad \forall a \in A$. Soit $G(\mathbf{X})$ défini en (1.22) et $H(\mathbf{X})$ tel que

$$H(\boldsymbol{X}) := \sum_{w \in A^*} (-1)^{|w|} R(w) \boldsymbol{X}(w). \tag{1.27}$$

Alors,

$$H(\boldsymbol{X}) \sqcup\!\sqcup G(\boldsymbol{X}) = 1. \tag{1.28}$$

Démonstration. Voir [4]. □

1.4 Alphabet à deux éléments

Dans cette section, il sera question de l'étude des propriétés d'un alphabet A comportant deux éléments $A = \{a, b\}$. Ce cas particulier est important dans la présente étude puisqu'il est en lien avec les solutions de l'équation de Schrödinger. D'une façon analogue, le cas d'un alphabet à un élément pourrait servir à l'étude des intégrales itérées rencontrée en (1.3) dans la méthode de résolution de Picard. Plusieurs des égalités présentées dans cette section proviennent de [3].

Définition 1.4.0.1 ([3]) *Soit $p, q, j \in \mathbb{Z}_{>0}$ tels que $\min(p,q) \geq j$. Soit $S_{p+q,j}$ l'ensemble de tous les mots dans $(ab)^p \sqcup\!\sqcup (ab)^q$ contenant le sous-mot a^2 exactement j fois. La somme de tous les mots contenus dans $S_{p+q,j}$ sera notée $T_{p+q,j} \in \mathbb{Q}\langle A \rangle$.*

Cette définition implique que S soit invariant sous toute partition de $p+q$ car les occurrences multiples du même mot ne sont pas considérées.

Proposition 1.4.0.1 *Pour tout $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$, la relation suivante est valide*

$$(ab)^p \sqcup\!\sqcup (ab)^q = \sum_{j=0}^{\min(p,q)} 4^j \binom{p+q-2j}{p-j} T_{p+q,j}. \tag{1.29}$$

Démonstration. Soit $u \in S_{p+q,j}$, un mot arbitraire de longueur $p+q$ possédant j fois a^2. Le nombre de fois que u apparaît dans $(ab)^p \sqcup\!\sqcup (ab)^q$ peut être calculé en comptant le nombre de façon de colorer en deux couleurs u : une couleur (bleue) pour les lettres provenant de $(ab)^p$ et une (rouge) pour $(ab)^q$. Le coloriage doit cependant rester compatible avec les règles du *shuffle produit*. Le nombre de a dans u est $p+q$ et par hypothèse $2j$ d'entre eux sont dans des facteurs de la forme a^2. Le nombre de a entourés de b des deux côtés (sauf pour le potentiel premier a seul) est $p+q-2j$. De ces a, on en trouve $p-j$ qui sont colorés bleus et donc génèrent une multiplicité de $\binom{p+q-2j}{p-j}$ à u. Les doublons a^2 peuvent soit être colorés bleu-rouge ou rouge-bleu (l'un vient nécessairement de chacun des termes). Il y a, au total, j doublons de ce type, impliquant l'ajout d'un facteur multiplicatif 2^j. Chaque doublon a^2 implique la présence d'un doublon b^2 pouvant aussi être coloré de deux façons multipliant le tout encore d'un facteur 2^j. Les derniers b ont une couleur uniquement déterminée par les règles du *shuffle produit*. Par conséquent, le nombre total de façons de former u est donné par $4^j\binom{p+q-2j}{p-j}$. Étant donné que tous les éléments de $T_{p+q,j}$ sont de même multiplicité, il est possible de sommer sur j ce qui complète la preuve. □

Cette propriété permet d'établir le théorème suivant.

Théorème 1.4.1 ([3]) *Soit $a, b \in A$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,*

$$\sum_{r=-n}^{n} (-1)^r \left[(ab)^{n-r} \sqcup\!\sqcup (ab)^{n+r}\right] = 4^n (a^2b^2)^n. \tag{1.30}$$

Démonstration. En insérant (1.4.0.1) l'égalité suivante est obtenue

$$\begin{aligned}\sum_{r=-n}^{n} (-1)^r \left[(ab)^{n-r} \sqcup\!\sqcup (ab)^{n+r}\right] &= \sum_{r=-n}^{n} (-1)^r \sum_{j=0}^{\min(n-r,n+r)} 4^j \binom{n+r+n-r-2j}{n-r-j} T_{n+r+n-r,j} \\ &= \sum_{r=-n}^{n} (-1)^r \sum_{j=0}^{\min(n-r,n+r)} 4^j \binom{2(n-j)}{n-r-j} T_{2n,j}.\end{aligned}$$

La seconde somme sur j navigue symétriquement entre 0 et n lorsque $r = \pm n$ et $r = 0$, respectivement. Par conséquent, en posant $N := n - j$, l'égalité devient

$$\sum_{r=-n}^{n} (-1)^r \left[(ab)^{n-r} \sqcup\!\sqcup (ab)^{n+r}\right] = \sum_{j=0}^{n} 4^j T_{2n,j} \sum_{r=-N}^{N} (-1)^r \binom{2N}{N-r}.$$

La somme de droite peut s'écrire

$$\sum_{r=-N}^{N} (-1)^r \binom{2N}{N-r} = \binom{2N}{N} + 2\sum_{r=1}^{N} (-1)^r \binom{2N}{N+r}.$$

Or, la somme pour $N \geq 1$ vaut $-\binom{2N}{N}$. Par conséquent, le seul cas qui engendre une contribution non nulle est obtenu lorsque $N = 0 \to n = j$, alors la contribution est de 1. Ainsi, le seul terme restant dans la somme est $4^j T_{2n,n}$ ce qui complète la preuve. □

1.5 Retour sur l'intégrale itérée

La vraie puissance du *shuffle produit* provient de la relation entre le *shuffle produit* et l'intégrale. Le théorème suivant met cette relation en perspective.

Théorème 1.5.1 ([5]) *Soit n, m deux entiers, $\{w_i\}_{i=1}^{n+m}$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Alors,*

$$\left(\int_x^y \prod_{j=1}^{n} w_j\right)\left(\int_x^y \prod_{j=n+1}^{n+m} w_j\right) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Shuff}(n,m)} \int_x^y \prod_{j=1}^{n+m} w_{\sigma(j)}. \tag{1.31}$$

Démonstration. Cette identité provient de la définition du *shuffle produit* et son écriture en termes de somme sur les éléments de $\mathrm{Shuff}(n, m)$. Par la suite, l'intégrale est considérée en utilisant la propriété de la proposition (1.2.0.1). □

Il est aussi possible d'utiliser la décomposition d'un produit de simplexes en simplexes de plus petit degré. La première intégrale du côté gauche peut être paramétrée sur $\Delta_m(0, 1)$ et la deuxième sur $\Delta_n(0, 1)$. Les deux intégrales se font donc sur le domaine donné par $\Delta_m(0, 1) \times \Delta_n(0, 1)$. La formule de décomposition des produits de simplexes indique que

$$\Delta_m(0,1) \times \Delta_n(0,1) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma(r,s)} \sigma\Delta_{m+n}(0,1),$$

où $\sigma\Delta_{m+n}$ agit sur les variables d'espace de la même façon que pour l'application sur les mots dans $\mathrm{Shuff}(m, n)$. Les zones de chevauchement sont d'épaisseur nulle et donc ne collaborent pas à l'intégral.

Afin d'illustrer ce concept, considérons l'exemple suivant.

Exemple 1.5.1.1 *Soit $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $x_0 \in M$. Soit $w_0 = \frac{dz}{z}$ et $\gamma : [0,1] \to M$ un chemin infiniment différentiable tel que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = z$. Alors*

$$\int_\gamma w_0 = \log(z) - \log(x_0).$$

Il s'ensuit, conséquence de la formule du produit, que l'intégrale itérée de profondeur n est donnée par

$$\int_\gamma \underbrace{w_0 \dots w_0}_{n} = \frac{1}{n!}\left(\int_\gamma w_0\right)^n = \frac{1}{n!}\left(\log(z) - \log(x_0)\right)^n.$$

De par sa compatibilité avec l'intégrale, le théorème précédent est particulièrement puissant comme le montre la proposition suivante qui sera utile ultérieurement.

Proposition 1.5.1.1 *Soit un alphabet $A = \{a, b\}$ et $n \geq 1$. Alors*

$$\sum_{r=-n}^{n} a^{(n-r)} \sqcup\!\sqcup\, b^{(n+r)} = (a+b)^{2n}. \tag{1.32}$$

Démonstration. Il est clair que le côté droit de l'équation (1.32) génère les 2^{2n} possibilités de mots une seule fois. Il suffit alors de montrer que chacun de ces 2^{2n} mots est généré du côté gauche, et ce, seulement une fois. Soit le mot w de longueur n contenant n_a lettres a et n_b lettres b, alors le seul *shuffle* produit pouvant générer ce mot est $a^{(n_a)} \sqcup\!\sqcup\, b^{(n_b)}$. Or ce produit ne peut générer aucun mot similaire, car aucune lettre n'est partagée de chaque côté du produit. Comme il sera produit une fois par ce *shuffle*, cette constatation complète la preuve.

□

Chapitre 2

Théorie de Sturm-Liouville

Ce chapitre a pour but d'introduire la théorie de Sturm-Liouville. Cette théorie permettra d'asseoir l'étude de l'équation de Schrödinger. De plus, ce chapitre permettra de poser les bases de l'étude des équations différentielles linéaires ordinaires du deuxième ordre. Il sera alors possible d'étudier ces équations de façon similaire à l'équation de Picard du chapitre précédent (1.3). La section est fortement inspirée des notes de cours de [10], [21], [27]. Dans le cas du problème de Sturm-Liouville, il est plus simple de traiter le problème en termes d'espace vectoriel normé. Pour ce faire, les concepts de base seront rappelés ici.

Définition 2.0.0.1 (Espace vectoriel) *Un espace vectoriel sur un corps commutatif K est un ensemble E d'éléments nommés vecteurs munis de deux lois. Une loi de composition interne $+$ telle que $+ : E^2 \to E$ appelée somme vectorielle, formant avec E un groupe abélien respectant :*

1. $u + v = v + u, \ \forall u, v \in E$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w, \qquad \forall u, v, w \in E$
3. $\exists 0 \in E \,|\, u + 0 = u, \qquad \forall u \in E$
4. $\forall u \in E \ \exists (-u) \in E$ tel que $u + (-u) = 0$.

C'est donc une loi commutative, associative, possédant une identité et des inverses pour chaque élément. De son côté la loi notée $\cdot$ telle que $\cdot : K \times E \to E$ est appelée multiplication par un scalaire. La loi $\cdot$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\lambda \cdot (u + v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v), \qquad \forall u, v \in E, \ \lambda \in K$
2. $(\lambda\mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u), \qquad \forall u \in E, \ \lambda, \mu \in K$
3. $(\lambda + \mu) \cdot u = (\lambda \cdot u) + (\mu \cdot u), \qquad \forall u, v \in E, \ \lambda, \mu \in K$
4. $1 \cdot u = u$.

Les éléments de E sont appelés vecteurs et ceux de K sont appelés scalaires.

Un autre concept important dans l'étude des espaces vectoriels est le concept de norme et, par conséquent, d'espace normé. Une norme est une façon de définir la longueur des vecteurs de l'espace. Elle permet aussi de définir la distance entre deux vecteurs en mesurant la norme du vecteur séparant ces deux vecteurs.

Définition 2.0.0.2 (Norme) *Une norme est une application sur E notée $\|\cdot\| : E \to [0, \infty)$ telle que*

1. $\|0\| = 0, 0 \in X$
2. $\|x\| > 0 \; \forall \, x \in X \setminus 0$
3. $\|cx\| = |c| \, \|x\| \; \forall c \in \mathbb{R}, x \in X$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \;\; \forall x, y \in X.$

Par conséquent, elle respecte le fait que seul le vecteur nul $0 \in E$ (le zéro additif du groupe $(E, +)$) possède une longueur nulle. La longueur des éléments de X est toujours positive et respecte l'inégalité de triangle.

Le prochain élément important est le concept de séquence de Cauchy. Ce concept permet de définir des espaces complets. Dans ce que nous appellerons une séquence de Cauchy, le concept de norme est utilisé en exigeant qu'à partir d'un certain n tous les éléments de la suite soient à moins de ϵ de distance (définie à partir de la norme) de n'importe quels autres vecteurs d'indice plus grand que n.D'une manière imagé, plus on avance dans la suite, moins notre déplacement (au sens de la norme) entre chacun des termes est grand.

Définition 2.0.0.3 (Séquence de Cauchy) *Soit un espace vectoriel sur K. Alors une suite de Cauchy est une séquence $(x_n)_{n \geq 0} \in X$ telle que $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \mid \|x_n - x_m\| \leq \epsilon, \; n, m \geq N$.*

On peut aussi exiger que toutes ces séquences convergent à l'intérieur de l'espace. Ce sera alors un espace vectoriel dit complet.

Définition 2.0.0.4 (Complétude) *Un espace vectoriel muni d'une norme est complet si chaque séquence de Cauchy $(x_n)_{n \geq 0}$ converge de telle sorte que $\exists x \in X$ tel que $\|x_n - x\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$.*

En une dimension plusieurs exemples sont simples à illustrer. Dans les deux exemples suivants, la norme sera simplement $\|x\| = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.0.0.1 *L'espace des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ avec la norme $\|x\| = |x|$ n'est pas complet. Par exemple, la suite*

$$x_0 = 2, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n},$$

est constituée d'éléments de $\mathbb{Q}$ finis pour tout n, mais converge vers $\sqrt{2}$, un élément qui n'est clairement pas dans $\mathbb{Q}$.

Exemple 2.0.0.2 *L'intervalle réel fermé $[0,1]$ muni de la même norme est complet contrairement à l'intervalle ouvert $]0,1[$ qui lui n'est pas complet. Par exemple, la suite $x_n = 1/n$ est dans $]0,1[$ pour tout n fini, mais sa limite ne l'est pas.*

Afin d'éclairer le lecteur, un dernier exemple en dimension infinie est présenté. Cet exemple permet de montrer que l'espace des fonctions continues est un exemple d'espace vectoriel non complet important. Il sera d'une utilité particulière pour étudier les solutions du problème de Sturm-Liouville dans les chapitres suivants.

Exemple 2.0.0.3 *[20] Soit l'espace vectoriel des fonctions continues de $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ avec la somme et le produit usuels par un réel comme loi «+» et «·» respectivement, muni de la norme suivante pour $p > 0$*

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}. \tag{2.1}$$

Pour $p = 2$ la fonction définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}], \\ 1, & x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}, 1], \\ 2^{n-1}x + \frac{1}{2} - 2^{n-2}, & x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}] \end{cases}$$

converge vers la fonction de Heaviside definie ici comme

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{1}{2}, \\ 1, & x \in]\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

lorsque $n \to \infty$, une fonction discontinue qui ne fait évidemment pas partie de l'espace vectoriel des fonctions continues. Or, on a bel et bien que $\|f_n - f_m\| \leq 2^{-n}$ pour $m \geq n$ et donc f_n est une suite de Cauchy. L'espace n'est donc pas complet pour cette norme.

Nous appellerons les espaces vectoriels possédant la propriété d'être normé et complet des espaces de Banach.

Définition 2.0.0.5 (Espace de Banach) *Un espace de Banach est un espace vectoriel qui possède une norme et qui est complet.*

Maintenant que l'idée de norme d'un vecteur est présentée, il est possible d'étendre notre définition à l'idée de longueur. Les espaces possédant un concept de longueur seront appelés espaces métriques.

Définition 2.0.0.6 (Espace métrique) *Un espace métrique X est un espace muni d'une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ appelé distance ou métrique suivant les propriétés suivantes :*

1. $d(x, x) = 0$
2. $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Définition 2.0.0.7 (Séquence de Cauchy (métrique)) *Soit un espace X métrique muni de la distance d. Alors une séquence $(x_n)_{n\geq 0}$ est dite de Cauchy si $\forall \epsilon > 0\, \exists N \mid d(x_n, x_m) \leq \epsilon$ lorsque $n, m \geq N$.*

Avec ce concept la définition d'espace complet peut être révisée.

Définition 2.0.0.8 (Espace métrique complet) *Un espace métrique X est complet si chaque séquence de Cauchy $(x_n)_{n\geq 0}$ converge. Soit $\exists x \in X$ tel que $d(x_n, x) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.*

Remarque *À partir d'une norme, il est toujours possible de définir une distance (métrique) en posant $d(x, y) = \|y - x\|$. Chacune des propriétés de la définition (2.0.0.6) est alors respectée.*

L'intuition de départ était alors bonne. Il est possible de définir la distance entre deux vecteurs comme la longueur de la différence de ces deux vecteurs. Par conséquent, tout espace de Banach est un espace métrique. Le contraire n'est pas nécessairement vrai, l'existence d'une métrique n'implique pas l'existence d'une norme [26]. Le prochain théorème sera particulièrement utile dans l'étude de la théorie de Sturm-Liouville. Il permet de déterminer sous quelles conditions une application de X dans X possède qu'un seul vecteur invariant sous l'application.

Théorème 2.0.1 (Théorème du point fixe) *Soit X un espace métrique complet et une application $F : X \to X$ telle qu'il existe un $\lambda \in (0, 1)$ tel que*

$$d(F(x), F(y)) \leq \lambda d(x, y), \quad \forall x, y \in X. \tag{2.2}$$

Alors F a un unique point fixe p tel que

$$F(p) = p.$$

Démonstration. L'existence de point p se démontre de la façon suivante. Soit $x_0 \in X$ et la suite définie par $x_{n+1} = F(x_n)$. La distance entre x_{n+1} et x_n respecte donc par hypothèse

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}).$$

Par conséquent, pour chaque $n \geq 0$ $d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n d(x_1, x_0)$. Pour $n = 0$ on a $d(x_1, x_0) \leq d(x_1, x_0)$ ce qui est nécessairement vrai. Posons que la relation est valide pour n, alors par induction pour $n + 1$ nous avons

$$\begin{aligned} d(x_{n+2}, x_{n+1}) &= d(F(x_{n+1}), F(x_n)) < \lambda d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq \lambda(\lambda^n d(x_1, x_0)) \\ &\leq \lambda^{n+1} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $n \geq m$ nous avons par l'inégalité du triangle que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq d(x_1, x_0) \sum_{k=m}^{n-1} \lambda^k \\ &\leq d(x_1, x_0) \frac{\lambda^m}{1 - \lambda}. \end{aligned}$$

On constate donc que $(x_n)_{n \geq 0}$ est une séquence de Cauchy de limite p telle que $x_n \to p$. Alors, $F(p) = p$ car $d(F(x_n), F(p)) \leq \lambda d(x_n, p) \to 0$. Ainsi, la séquence x_n possède une limite p. Il suffit alors de montrer que cette limite p est unique. Posons l'existence de deux limites p et q de telle sorte que $p \neq q$. Alors, nous avons que $F(p) = p$ et $F(q) = q$. Cependant la distance entre $F(p)$ et $F(q)$ doit respecter $d(p, q) = d(F(p), F(q)) \leq \lambda d(p, q)$. Or, en effectuant le remplacement des points fixes on obtient que $d(p, q) \leq \lambda d(p, q)$. Mais puisque $\lambda \in]0, 1[$ on a nécessairement que $p = q$. Par conséquent, le point fixe existe et il est bel et bien unique. $\square$

Un autre concept apparenté qui sera particulièrement important est l'idée des fonctions de Lipschitz continues aussi appelées fonctions lipschitziennes.

Définition 2.0.1.1 (fonction lipschitzienne) *Soit X un espace de Banach. Une fonction f de X dans X est dite lipschitzienne s'il existe un $K > 0$ tel que*

$$\|f(x) - f(y)\| < K \|x - y\|.$$

Exemple 2.0.1.1 *La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas lipschitzienne, car il n'existe pas de constante K telle que $|x^2 - y^2| \leq K|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. Cependant, si on restreint x sur $[0, 1]$, alors elle le devient.*

Il est alors possible d'utiliser ce concept pour obtenir une définition d'équation différentielle non pathologique.

Définition 2.0.1.2 (équation différentielle du premier ordre localement lipschitzienne) *Une équation différentielle du premier ordre définie par*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \qquad x(0) = x_0, \tag{2.3}$$

est dit localement lipschitzienne si, soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ contenant $(0, x_0)$ la valeur initiale de l'équation différentielle au temps t=0 et à la position $x = x_0$, les propriétés suivantes sont respectées :

1. *$f : U \to \mathbb{R}^n$ est continue,*
2. *$|f| \leq M$,*
3. *f est lipschitzienne pour la seconde variable (variable spatiale) dans l'ouvert U. i.e. $|f(t, u) - f(t, v)| \leq K|u - v|, \quad \forall (t, u), (t, v) \in U$,*
4. *Il existe un $h \in (0, \frac{1}{2K})$ tel que $[-h, h] \times B_n(x_0)$ où $B_n(x_0)$ est la sphère dans $\mathbb{R}^n$ centrée en x_0 contenant tous les y de telle sorte que $|y - x_0| \leq hM$*

Cette définition permet de montrer que la solution d'un tel problème est unique. Ce résultat constitue un résultat de base qui permet de montrer l'unicité des solutions d'équations différentielles aux ordres supérieurs.

Théorème 2.0.2 *Soit une fonction lipschitzienne $f(t, x)$ telle qu'à la définition (2.0.1.2). Alors, il existe une unique fonction $x(t) : (-h, h) \to \mathbb{R}^n$ satisfaisant l'équation différentielle ordinaire du premier ordre suivante :*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \qquad x(0) = x_0. \tag{2.4}$$

Démonstration. La preuve se base sur l'utilisation du théorème du point fixe. Soit un $h > 0$ quelconque, $I = [-h, h]$ un intervalle centré en 0 et $C(I, B)$ l'espace des fonctions continues bornées de I dans $B_n(x_0)$. Soit l'application $P : C(I, B) \to C(I, B)$ envoyant une fonction continue vers une autre telle que

$$P(x)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds.$$

Alors le problème (2.0.2) peut s'écrire comme

$$x = P(x). \tag{2.5}$$

Pour appliquer le théorème du point fixe il suffit de montrer que $P(x)$ est bien définie, que $P(x) \in C(I, B)$ et finalement que (2.2) soit respectée. L'espace $C(I, B)$ est un espace métrique complet sous la norme $||\cdot||_\infty$. Il est possible de choisir $h > 0$ de telle sorte que $I \times B_n(x_0) \subset U$, conséquence du rayon de la sphère donné par hM. Ainsi, on a aussi que $f(t, x(t))$ est bien définie et continue sur $I \times B_n(x_0)$. Par conséquent, l'opérateur P est bien défini.

L'application $t \to P(x)(t)$ est continue puisque

$$F(t) - F(0) = \int_0^t f(s, x(s))ds. \tag{2.6}$$

Comme $|f| \leq M$, nous avons que

$$\begin{aligned} -Mt \leq \int_0^t f(s, x(s))ds \leq Mt \\ \implies |F(t) - F(0)| \leq Mt. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{t\to 0} F(t) = F(0)$. De plus, $P(x) \in C(I, B)$ car

$$|P(x)(t) - x_0| \leq \int_0^h |f(s, x(s))|ds \leq hM. \tag{2.7}$$

Or, comme la sphère est de rayon hM il s'ensuit que $P(x)(t) \in B \quad \forall t \in [-h, h]$ et donc que $P(x) \in C(I, B)$. De plus, $P : C(I, B) \to C(I, B)$ car $\forall\, t \in [-h, h]$. Par conséquent, nous avons que

$$\begin{aligned} |P(x)(t) - P(y)(t)| &= \left| \int_0^t \left(f(s, x(s)) - f(t, y(s))\right) ds \right| && (2.8) \\ &\leq \int_0^t |(f(s, x(s)) - f(t, y(s)))|\, ds && (2.9) \\ &\leq K \int_0^t |x(s) - y(s)| \qquad \text{(Lipschitz)} && (2.10) \\ &\leq Kt \max_{|s|\leq t} |x(s) - y(s)| && (2.11) \\ &\leq Kh \|x - y\| \leq \|x - y\| /2, \qquad h \in \left(0, \frac{1}{2K}\right). && (2.12) \end{aligned}$$

De ce fait, comme la précédente équation est valide pour tout $t \in [-h, h]$, on obtient que $\|P(x) - P(y)\| \leq \|x - y\| /2$. Du coup, P a un point fixe et donc (2.3) possède bel et bien une solution unique. □

Le fait que le théorème ne soit valide que pour les équations différentielles du premier ordre diminue fortement son applicabilité en physique dans son état actuel. Pour appliquer le théorème à des équations d'ordre supérieur, il est possible d'utiliser l'astuce suivante :

Soit une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre n de la forme

$$\frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_0(t) y(t) = b(t), \tag{2.13}$$

soumise aux conditions initiales $y^{(i)}(0) = \alpha_i$. Cette équation différentielle peut s'écrire comme un système d'équations de premier ordre. Soit z_i un ensemble de nouvelles variables telles que

$$z_1 = y(t), z_2 = \frac{d}{dt} y(t), \cdots, z_n = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t). \tag{2.14}$$

L'équation (2.13) peut alors s'écrire en un système d'équations défini par

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ b(t) - [a_{n-1}(t)z_n + \cdots + a_0(t)z_1] \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Or, le théorème de Picard implique qu'il existe une solution unique telle que $(z_1(0), \cdots, z_n(0)) = (y(0), \cdots, y^{n-1}(0))$. Par conséquent, il est possible d'utiliser le théorème du point fixe sur chacune de ces équations de premier ordre afin de montrer qu'une solution unique existe.

Les équations différentielles ordinaires d'ordre 2 sont d'un intérêt particulier. Plusieurs phénomènes physiques y sont rattachés. Un problème du deuxième ordre pertinent est celui dérivé de l'équation de Sturm-Liouville.

Définition 2.0.2.1 *Soit $p(x)$, $q(x)$ et $\omega(x)$, des fonctions réelles sur l'intervalle (a, b) telles que $0 \in (a, b)$ avec comme condition initiale $y(0) = \alpha_0$ et $y'(0) = \alpha_1$ et λ un inconnu du problème. Alors l'équation de Sturm-Liouville peut s'écrire*

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right] + q(x)y(x) = -\lambda w(x)y(x). \tag{2.16}$$

Théorème 2.0.3 *L'équation (2.16) possède une solution unique lorsque le problème est formulé avec des conditions initiales.*

Démonstration. L'équation (2.16) peut s'écrire sous la forme (2.13) de telle sorte que

$$a_2(x)\frac{d^2y(x)}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy(x)}{dx} + a_0(x)R(x)y(x) = f(x). \tag{2.17}$$

En multipliant l'équation par le facteur intégrant $\mu(x)$ et en divisant par $a_2(x)$ on obtient

$$\mu(x)y'' + \mu(x)\frac{a_1(x)}{a_2(x)}y' + \mu(x)\frac{a_0(x)}{a_2(x)}y = \mu(x)\frac{f(x)}{a_2(x)}. \tag{2.18}$$

L'objectif du facteur intégrant est que les deux premiers termes doivent devenir une dérivée exacte. Cela implique que

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)\frac{a_1(x)}{a_2(x)}. \tag{2.19}$$

Cette équation est séparable et particulièrement facile à résoudre. On obtient alors le facteur intégrant suivant :

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx\right). \tag{2.20}$$

On obtient ainsi la correspondance entre les fonctions de l'équation (2.16) et les fonction a_0, a_1, a_2 de l'équation (2.17) de telle sorte que

$$p(x) = \exp\left(\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx\right), \tag{2.21}$$

$$-\lambda w(x) = p(x)\frac{f(x)}{a_2(x)}, \tag{2.22}$$

$$q(x) = p(x)\frac{a_0(x)}{a_2(x)}. \tag{2.23}$$

Par conséquent, on peut appliquer l'extension d'ordre supérieur du théorème (2.0.2) en utilisant le système présenté en (2.15). □

Cependant, l'intérêt de cette équation réside dans l'analyse de problèmes soumis à des conditions aux frontières et non pas aux conditions initiales en un point. C'est-à-dire, au lieu de fixer simplement en un point la valeur de la solution et sa dérivée première, la fonction sera fixée à deux endroits différents.

Cette façon d'étudier le problème prend racine dans la théorie de l'élasticité, où deux extrémités d'une corde sont contraintes et dans la théorie de la chaleur, où une pièce conductrice de chaleur est chauffée par une extrémité et gardée à température constante de l'autre côté. Ces deux phénomènes sont régis par des équations du second ordre. Le problème se pose alors de la façon suivante.

Définition 2.0.3.1 (Sturm-Liouville régulier avec conditions aux frontières) *Soit $p(x), r(x)$ deux fonctions continues non nulles de telle sorte que $p(x)$ soit une fonction C^1 sur (a, b). Le problème de Sturm-Liouville avec conditions aux frontières s'énonce alors de la façon suivante :*

$$(p(x)y')' + q(x)y = -\lambda w(x)y, \tag{2.24}$$

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0, \tag{2.25}$$

$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0, \tag{2.26}$$

$$(\alpha_0, \alpha_1), (\beta_0, \beta_1) \neq 0. \tag{2.27}$$

De plus, il sera exigé que $w(x) > 0$ pour $x \in (a, b)$. Cette fonction est appelée fonction poids. La raison de cette application apparaîtra lorsque la norme de l'espace, où réside l'équation de Sturm-Liouville, sera présentée. Ce problème est appelé problème de Sturm-Liouville régulier contrairement à la version singulière, où on permet des fonctions non nulles. Ici nous nous intéresserons, par souci de simplicité, au cas régulier.

Ce problème peut sembler similaire, on pourrait même croire qu'il est possible de le transformer comme le problème précédent. Cependant la distinction est beaucoup plus subtile comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.0.3.1 *Soit $p(x) = 1, q(x) = 0, w(x) = 1$ et $L > 0$ alors l'équation différentielle (2.0.3.1) avec les conditions aux frontières $y(0) = 0, y(L) = 0$ devient*

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \lambda y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0. \tag{2.28}$$

La solution de cette équation, sans considérer les conditions aux frontières, dépend du paramètre λ et d'un coefficient d'intégration c ; elle est donnée par

$$y_\lambda(x) = c\sin(\sqrt{\lambda}x). \tag{2.29}$$

La première équation frontière est automatiquement respectée pour tout couple (c, λ). La seconde équation frontière implique que

$$\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0, \tag{2.30}$$

par conséquent $\sqrt{\lambda}$ est multivalué et est donné par

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{2.31}$$

Il y a donc une liste de solution au problème de Sturm-Liouville précédent (à une constante multiplicative près) de la forme (λ_k, y_k), $k \in \mathbb{N}$.

La solution n'est donc plus unique comme présentée au théorème précédent. Il n'est même pas certain de pouvoir en trouver une seule. Par conséquent, le problème avec conditions aux frontières ne possède des solutions que pour certaines valeurs de λ. Le prochain exemple, bien que trivial, permet de bien imager le problème.

Exemple 2.0.3.2 *Avec les mêmes paramètres que (2.0.3.2) et des conditions aux frontières différentes, le problème devient*

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \lambda y(t) = 0, \quad y(0) = 0, y(\pi) = a. \tag{2.32}$$

Clairement ici, aucune solution n'existe pour $a \neq 0$.

Les prochains théorèmes traiteront de l'étude des couples (λ_k, y_k) pour un groupe d'équations données. Dans un premier temps, il sera nécessaire de restreindre l'espace des conditions frontières possibles puisque, comme nous avons vu, certaines engendrent des problèmes sans solutions. Pour ce faire, la formule de Green sera nécessaire.

Définition 2.0.3.2 *Soit $\mathcal{L}$ l'opérateur linéaire défini par l'équation de Sturm-Liouville (2.0.2.1) tel que*

$$\mathcal{L}\left[\phi(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\phi\right] + q(x)\phi(x).$$

Selon cette définition il est possible d'écrire le problème de Sturm-Liouville tel que

$$\mathcal{L}[\phi] = -\lambda w \phi.$$

L'opérateur $\mathcal{L}$ est linéaire, pour deux fonctions ϕ, ψ et deux constantes c_1, c_2 on trouve que

$$\mathcal{L}[c_1\phi + c_2\psi] = c_1\mathcal{L}[\phi] + c_2\mathcal{L}[\psi].$$

Proposition 2.0.3.1 *Soit $p(x)$ et $q(x)$ deux fonctions réelles, alors*

$$\mathcal{L}[u]^* = \mathcal{L}[u^*], \tag{2.33}$$

où l'opérateur «$*$» représente le complexe conjugué.

Démonstration. Le complexe conjugué commute avec les dérivées et la multiplication de fonctions. Par conséquent, il peut être entré dans l'équation et agir directement sur la solution u. On obtient donc trivialement l'égalité précédente. □

Avant de pouvoir écrire la formule de Green, il est nécessaire d'étudier le comportement de l'intégrale d'une fonction quelconque multipliée par une autre fonction, où l'opérateur $\mathcal{L}$ est appliqué.

Proposition 2.0.3.2 *Soit $p(x), q(x), f(x)$ et $g(x)$ des fonctions réelles, lisses et intégrables sur (a, b), alors*

$$\int_a^b f\mathcal{L}[g]dx = p(x)f(x)\left.\frac{dg}{dx}\right|_a^b - \int_a^b p\frac{df}{dx}\frac{dg}{dx}dx + \int_a^b qfgdx. \tag{2.34}$$

Démonstration. La preuve se fait aisément en intégrant par parties. □

Cette identité nous permet d'obtenir la formule de Green énoncée au théorème suivant.

Théorème 2.0.4 (Formule de Green) *Pour toutes fonctions lisses et différentiables u et v, nous avons que*

$$\int_a^b u^*\mathcal{L}[v]dx - \int_a^b \mathcal{L}[u]^* v dx = p\left[u^*\frac{dv}{dx} - v\frac{du^*}{dx}\right]. \tag{2.35}$$

Démonstration. La preuve découle des deux formules précédentes. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^b u^*\mathcal{L}[v]dx - \int_a^b \mathcal{L}[u]^* v dx &= \int_a^b u^*\mathcal{L}[v]dx - \int_a^b \mathcal{L}[u^*]v dx && (2.36)\\
&= \left[pu^*\left.\frac{dv}{dx}\right|_a^b - \int_a^b p\frac{du^*}{dx}\frac{dv}{dx}dx + \int_a^b qu^*vdx\right] && (2.37)\\
&\quad - \left[pv\left.\frac{du^*}{dx}\right|_a^b - \int_a^b p\frac{dv}{dx}\frac{du^*}{dx}dx + \int_a^b qu^*vdx\right] && (2.38)\\
&= p\left.\left[u^*\frac{dv}{dx} - v\frac{du^*}{dx}\right]\right|_a^b, && (2.39)
\end{aligned}$$

puisque les termes de droite s'annulent. $\square$

Ce théorème permet de définir les conditions aux frontières appropriées pour un ensemble de fonctions p, q et w.

Définition 2.0.4.1 (conditions appropriées) *Les conditions aux frontières en $x = a$ et $x = b$ d'une solution ϕ de l'équation de Sturm-Liouville sont dites appropriées au sens de Sturm-Liouville ssi*

$$p\left[u^*\frac{dv}{dx} - v\frac{du^*}{dx}\right]\Bigg|_a^b = 0, \tag{2.40}$$

pour toutes fonctions u et v lisses et différentiables satisfaisant les conditions aux frontières.

Cette définition demande donc la vérification de toutes les fonctions lisses u, v respectant les conditions aux frontières. Cependant, comme nous le verrons, il y a des façons plus efficaces de vérifier l'appartenance d'un ensemble de conditions aux frontières à l'ensemble des conditions appropriées. La prochaine proposition découle directement de la proposition précédente.

Proposition 2.0.4.1 *Soit un ensemble de conditions aux frontières appropriées au sens de Sturm-Liouville. Alors,*

$$\int_a^b u^*\mathcal{L}[v]dx - \int_a^b \mathcal{L}[u]^* v dx = 0. \tag{2.41}$$

Le lecteur averti reconnaîtra ici la définition d'un opérateur auto-adjoint. Un opérateur auto-adjoint est intéressant étant donné les relations qu'il implique lorsqu'il est jumelé avec un produit scalaire. Dans un premier temps la définition du produit scalaire associé aux équations de Sturm-Liouville sera abordée.

Définition 2.0.4.2 (produit scalaire) *Il est possible d'associer à tout problème de Sturm-Liouville un produit scalaire, noté ici $\langle f \mid g\rangle$, entre deux fonctions f et g tel que*

$$\langle f \mid g\rangle = \int_a^b f^*(x)g(x)w(x)dx\,, \tag{2.42}$$

où $w(x)$ est la fonction poids de l'équation de Sturm-Liouville associé3.

La fonction $w(x)$ est appelée fonction poids puisqu'elle agit comme le poids d'une mesure en intégration. Ce produit possède plusieurs propriétés utiles et simples à démontrer telles que :

1. $\langle f \mid g\rangle = \langle g \mid f\rangle^*$,
2. $\langle h \mid \alpha f + \beta g\rangle = \alpha \langle h \mid f\rangle + \beta^* \langle h \mid g\rangle$,
3. $\langle \alpha f + \beta g \mid h\rangle = \alpha^* \langle f \mid h\rangle + \beta^* \langle g \mid h\rangle$,
4. $\langle f \mid f\rangle \geq 0$,
5. $\langle f \mid f\rangle = 0 \iff f = 0 \,\forall\, x \in (a, b)$.

La proposition (2.0.4.1) et la définition du produit scalaire permettent d'écrire

$$\langle u \mid \mathcal{L}[v] \rangle = \langle \mathcal{L}[u] \mid v \rangle .$$

Cette propriété est en tout point semblable à la propriété de certaines matrices dites auto-adjointes. Pour rappel, l'adjointe d'une matrice A est écrite A^* et respecte la propriété $\langle Ax \mid y \rangle = \langle x \mid A^* y \rangle$. Un opérateur auto-adjoint possède la propriété $A^* = A$ et par conséquent $\langle u \mid Av \rangle = \langle Au \mid v \rangle$. Cette réalisation permet d'obtenir un résultat important.

Théorème 2.0.5 *Les valeurs propres du problème (2.0.3.1) notées λ_n sont réelles.*

Démonstration. Soit (λ_1, ϕ_1) et (λ_2, ϕ_2) deux solutions de (2.0.3.1). Nous avons que

$$\langle \phi_1 \mid \mathcal{L}[\phi_2] \rangle = \langle \mathcal{L}[\phi_1] \mid \phi_2 \rangle$$

étant donné les propriétés des solutions de l'équation différentielle. Or, comme ϕ_1, ϕ_2 sont solutions du problème de Sturm-Liouville, nous avons que

$$\mathcal{L}[\phi_2] = -\lambda_2 w \phi_2, \qquad \mathcal{L}[\phi_1] = -\lambda_1 w \phi_1.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 \mid \mathcal{L}[\phi_2] \rangle &= \langle \mathcal{L}[\phi_1] \mid \phi_2 \rangle \\ \Rightarrow \langle \phi_1 \mid -\lambda_2 w \phi_2 \rangle &= \langle -\lambda_1 w \phi_1 \mid \phi_2 \rangle \\ \Rightarrow \lambda_2 \langle \phi_1 \mid w \phi_2 \rangle &= \lambda_1^* \langle w \phi_1 \mid \phi_2 \rangle . \end{aligned}$$

Or, comme w est une fonction positive, $\langle \phi_1 \mid w\phi_2 \rangle = \langle w\phi_1 \mid \phi_2 \rangle$ nous avons donc deux possibilités

$$\lambda_2 = \lambda_1^* \text{ ou } \langle \phi_1 \mid \phi_2 \rangle = 0.$$

Il est possible de choisir nos deux paires telles que $(\lambda_1, \phi_1) = (\lambda_2, \phi_2) = (\lambda, \phi)$. Par conséquent, les deux possibilités deviennent

$$\lambda = \lambda^* \text{ ou } \langle \phi^* \mid \phi \rangle = 0.$$

Comme w est, encore une fois, une fonction positive et comme la solution ϕ n'est pas triviale ($\neq 0$), alors on trouve

$$\lambda = \lambda^*.$$

Par conséquent, les valeurs propres de Sturm-Liouville doivent nécessairement être réelles, ce qui complète la preuve. □

Une autre propriété importante est reliée au concept d'orthogonalité de certains éléments d'un espace vectoriel.

Théorème 2.0.6 *Deux solutions ϕ_n et ϕ_m de (2.0.3.1) correspondant aux valeurs propres λ_n et λ_m telles que $\lambda_n \neq \lambda_m$ sont orthogonales i.e.*

$$\langle \phi_n \mid \phi_m \rangle = \int_a^b \phi_m^*(x)\phi_n(x)w(x)dx = 0. \tag{2.43}$$

Démonstration. Dans le précédent théorème (2.0.5), il a été établi que pour deux paires de valeurs propres λ_n et λ_m et de fonctions propres ϕ_n et ϕ_m

$$\lambda_m = \lambda_n^* \text{ ou } \langle \phi_m \mid \phi_n \rangle = 0.$$

Puisque λ_1 et λ_2 sont différents et qu'ils sont réels, il est nécessaire que

$$\langle \phi_n \mid \phi_m \rangle = 0,$$

ce qui prouve le théorème. □

Le prochain théorème permettra de déterminer plusieurs autres propriétés des valeurs propres de l'opérateur de Sturm-Liouville.

Théorème 2.0.7 (Quotient de Rayleigh) *Soit (λ, ϕ) une paire de valeur propre et de vecteur propre du problème de Sturm-Liouville (2.0.3.1) avec des conditions frontières adaptées. Alors, la valeur propre et le vecteur propre sont reliés par*

$$\lambda = \frac{-p\phi^* \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_a^b + \int_a^b \left[p\left|\frac{d\phi}{dx}\right|^2 - q|\phi|^2\right] dx}{\int_a^b |\phi|^2 w dx}. \tag{2.44}$$

Démonstration. Soit une paire valeur propre et fonction propre (λ, ϕ), solution du problème de Sturm-Liouville avec des conditions aux frontières adaptées et soit l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_a^b \phi^* \mathcal{L}[\phi] dx &= \int_a^b \phi^*(-\lambda w \phi) dx \\
&= -\lambda \int_a^b (\phi(x))^* \phi(x) w(x) dx \\
&= -\lambda \int_a^b |\phi|^2 w dx.
\end{aligned}$$

Avec l'aide de (2.0.3.2), on peut écrire

$$\int_a^b \phi^* \mathcal{L}[\phi] dx = p\phi^* \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_a^b - \int_a^b p \frac{d\phi^*}{dx}\frac{d\phi}{dx} dx + \int_a^b q\phi^*\phi dx \tag{2.45}$$

$$= p\phi^* \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_a^b - \int_a^b \left[p\left|\frac{d\phi}{dx}\right|^2 - q\,|\phi|^2\right] dx. \tag{2.46}$$

$$\tag{2.47}$$

Par conséquent, on trouve

$$-\lambda \int_a^b |\phi|^2 w dx = p\phi^* \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_a^b - \int_a^b \left[p \left|\frac{d\phi}{dx}\right|^2 - q\,|\phi|^2 \right] dx. \tag{2.48}$$

$$\tag{2.49}$$

L'égalité est alors facilement obtenue en réarrangeant les termes. □

Bien que les valeurs propres de ce problème soient réelles, nous en connaissons encore très peu sur leurs comportements (pour le moment). Il serait donc intéressant de déterminer où se situent ces valeurs propres. On peut aussi se poser la question quant à leur nombre. Le prochain théorème répondra partiellement à cette question.

Théorème 2.0.8 *Il existe une valeur propre minimale λ_1 et une infinité d'autres valeurs propres telles que*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots, \qquad \lambda_n \to \infty \tag{2.50}$$

Démonstration. Pour prouver qu'il existe une valeur minimale il suffit de montrer que

$$\lambda_1 = \min_{y(x)} \frac{-py^* \left.\frac{dy}{dx}\right|_a^b + \int_a^b \left[p \left|\frac{dy}{dx}\right|^2 - q|y|^2 \right] dx}{\int_a^b |y|^2 w dx} \tag{2.51}$$

lorsque $y(x) = \phi_1(x)$. Pour ce faire, il est nécessaire d'utiliser le calcul des variations ou de passer par la fonction de Green reliée au problème. Ces deux éléments sont de faible intérêt pour la présente recherche et ne seront donc pas abordés ici. □

Une autre propriété intéressante des solutions de l'équation de Sturm-Liouville est l'alternance des zéros de la solution et, par conséquent, l'aspect oscillatoire du problème. En effet, nous appellerons fonction oscillatoire toute fonction qui change de signe sur un intervalle.

Pour une valeur fixe de λ, il est possible d'inclure la valeur propre dans la fonction potentielle de telle sorte que $q' = q + \lambda\omega$. L'équation peut alors se réécrire, en conservant q comme symbole pour le potentiel

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = 0,$$

avec, comme précédemment, $p(x) \in \mathbb{C}^1$, $p(x) > 0$ et $q(x) \in \mathbb{C}$ sur l'intervalle $[a, b]$. Une première question intéressante est de se demander dans quelle circonstance les solutions de cette équation sont oscillatoires. Une approche possible est d'utiliser la transformation de Prüfer telle que

$$u = r\sin\theta$$
$$pu' = r\cos\theta.$$

L'équation différentielle peut être solutionnée en utilisant les conditions initiales suivantes $u(a) = u_0$ et $u'(a) = u'_0$. De plus, $r > 0$ puisque $r = \sqrt{u^2 + p^2 u'^2}$ sur l'intervalle (a, b). L'équation différentielle peut alors être écrite comme le système suivant :

$$\begin{aligned} r' &= \left(\frac{1}{p} - q\right) r \sin\theta \cos\theta, \\ \theta' &= \frac{1}{p}(\cos\theta)^2 + q\,(\sin\theta)^2\,, \\ u_0 = r_0 \sin\theta_0, &\qquad p(a)u'_0 = r_0 \cos\theta_0. \end{aligned}$$

Si $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ alors la solution est unique et les deux systèmes sont équivalents. L'intérêt réside dans le fait que les zéros de u proviennent exclusivement de la dépendance en θ car $r > 0$. Cela arrivera lorsque θ est un multiple de π. De plus, θ ne dépend pas de r. Par conséquent, les zéros sont bel et bien indépendants de r. On peut restreindre $\theta(a)$ sur l'intervalle $[0, \lambda)$ étant donné le fait que l'on peut effectuer une réflexion autour de $u = 0$ sans toucher l'étude des zéros. Par conséquent, pour l'étude des zéros on peut se satisfaire de l'étude du problème suivant :

$$\theta' = \frac{1}{p}(\cos\theta)^2 + q(\sin\theta)^2, \qquad \theta(a) = \gamma \in [0, \pi)\,. \tag{2.52}$$

La prochaine proposition sera utile afin de prouver un théorème important dans la théorie de Sturm-Liouville. Cette proposition permet de borner la fonction $\theta(x)$ en fonction de x. Cela nous permettra, par la suite, de comprendre l'apparition des zéros des solutions de l'équation de Sturm-Liouville.

Proposition 2.0.8.1 *Il y a au plus un $x \in (a, b)$ noté x_m tel que $\theta(x_m) = m\pi$ où m, est un entier. De plus,*

$$\begin{cases} \theta(x) < m\pi, & x < x_m \\ \theta(x) = m\pi, & x = x_m \\ \theta(x) > m\pi, & x > x_m. \end{cases} \tag{2.53}$$

Démonstration. Si $x_m < b$, alors

$$\theta'(x_m) = \frac{1}{p(x_m)} > 0, \tag{2.54}$$

et $\theta > m\pi$ sur un intervalle suffisamment petit à droite de x_m. Supposons que pour $c > x_m$ on trouve $\theta(c) \leq m\pi$. Considérons alors l'ensemble

$$S = \{x \in (x_m, c] \,|\, \theta(x) \leq m\pi\}\,. \tag{2.55}$$

S possède une borne inférieure notée $x_* > x_m$ qui satisfait $\theta > m\pi$ sur (x_m, x_*) et $\theta(x_*) = m\pi$. Il s'ensuit que $\theta'(x_*) \leq 0$. Cependant l'inégalité plus haut tient et donc il ne peut exister de point c. Par conséquent $\theta > m\pi$ pour $x > x_m$.

De plus, s'il existe une autre valeur $\bar{x}$ avec $\theta(\bar{x}) = m\pi$ alors $\bar{x} < x_m$ et en utilisant l'argument plus haut la contradiction $\theta(x_m) > m\pi$ s'en suit. $\square$

Cette proposition et cette transformation sont des outils puissants dans l'analyse des valeurs propres et des solutions de l'équation de Sturm-Liouville. Pour énoncer l'allure générale d'une solution du problème de Sturm-Liouville, il sera nécessaire de présenter deux théorèmes qui sont, en apparence, non reliés. Le premier considère l'inégalité entre deux fonctions lorsque leurs dérivées possèdent certaines propriétés strictes s'appliquant néanmoins aux solutions du problème de Sturm-Liouville. Avant de présenter ce théorème il sera nécessaire d'énoncer le lemme de Gronwall [1].

Lemme 2.0.8.1 *Si $\psi(x)$ et $\phi(x)$ sont des fonctions continues telle que $\psi(x) \geq 0$ et que pour tout $t \geq t_0$ elles verrifient :*

$$\phi(t) \leq K + \int_{t_0}^{t} \psi(s)\phi(s)ds$$

où K est une constante positive, alors pour tout $t \geq t_0$:

$$\phi(t) \leq K \exp\left\{\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds\right\}.$$

Le théorème d'intérêt peut alors être énoncé.

Théorème 2.0.9 *Soit F et G deux fonctions à deux variables continues définies sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ telles que $F(x,y) \geq G(x,y)$ sur Ω. Si ces deux fonctions satisfont une condition de Lipschitz de constante L par rapport à y sur Ω et qu'il existe deux fonctions*

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y(x)) \quad et \quad \frac{dz}{dx} = G(x, z(x)), \qquad \forall x \in \,]a, b[\,, \tag{2.56}$$

et si $y(a) \geq z(a)$, alors $y(x) \geq z(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

Démonstration. Soit $g(x) = z(x) - y(x)$. Il faut alors montrer que $\forall x \in [a, b]$, $g(x) \leq 0$. Or, comme $y(a) \geq z(a)$ nous avons que $g(a) \leq 0$.

Considérons maintenant le contraire, c'est-à-dire que pour un $c \in \,]a, b[$ nous avons $g(c) > 0$. L'ensemble des éléments plus petits que c où $g(x) \leq 0$ peut être écrit comme

$$S = \{x \in [a, c] \mid g(x) \leq 0\}.$$

L'ensemble S est nécessairement borné par c, de plus il n'est pas vide car $a \in S$. Par conséquent, cet ensemble possède une limite supérieure x_1. Or, $g(x_1) = 0$ car si $g(x_1) \neq 0$ et puisque g est continue il existe nécessairement un x_1' avec $x_1 < x_1' < c$ tel que $g(x_1') \leq 0$.

De plus, conséquence de la construction de l'ensemble S nous avons que $g(x) > 0 \quad \forall x \in [x_1, c[$. Considérons maintenant l'effet sur G et F, nous avons

$$g(x) = \int_{x_1}^{x} (G(s, z(s)) - F(s, y(s)))\, ds.$$

En effet, en considérant la dérivée de l'équation précédente on retrouve $y' = F(x, y)$ et $z' = G(x, z)$ en utilisant la règle de l'intégrale de Leibniz. On peut réécrire l'intérieur de l'intégrale comme

$$G(s, z(s)) - F(s, y(s)) = (G(s, z) - G(s, y)) + (G(s, y) - F(s, y))\,.$$

Or, par hypothèse, $F(x, y) \geq G(x, y) \quad \forall x \in \Omega$. Ainsi $((G(s, y) - F(s, y)) \leq 0$ et donc

$$\begin{aligned} G(s, z(s)) - F(s, y(s)) &\leq G(s, z(s)) - G(s, y(s)) \\ \Rightarrow g(x) &\leq \int_{x_1}^{x} (G(s, z(s)) - G(s, y(s)))\, ds. \end{aligned}$$

Or, $G(x, y)$ est Lipschitz continue avec une constante L sur y. Par conséquent, nous avons $|G(s, z(s)) - G(s, y(s))| \leq L\,|z(s) - y(s)|$. Cependant, sur notre domaine $|z(s) - g(s)| = g(s)$ car $g(s) > 0$ sur $x \in]x_1, c]$. Ainsi on trouve,

$$g(x) \leq \int_{x_1}^{x} G(s, z(s)) - G(s, y(s)) ds \leq \int_{x_1}^{x} |G(s, z(s)) - G(s, y(s))|\, ds \leq \int_{x_1}^{x} Lg(s) ds.$$

Par conséquent, on trouve $g(x) \leq L \int_{x_1}^{x} g(s) ds$. En utilisant le lemme de Gronwall il est nécessaire que $g(x) \leq 0$ sur $x \in]x_1, c]$. Or, cela contredit l'hypothèse. Il ne peut donc pas exister de constante c telle que $g(x) > 0$ et $x \geq c$. On conclut donc que $y(x) \geq z(x)\ \forall x \in [a, b]$ par contradiction, ce qui termine la preuve. □

Le prochain corollaire montre que sous certaines conditions les deux fonctions $y(x)$ et $z(x)$ doivent être égales lorsqu'elles partagent un point commun sur l'intervalle.

Corollaire 2.0.9.1 *Si du théorème précédent il existe un $x_c > a$ tel que $y(x_c) = z(x_c)$, alors sur l'intervalle $x \in [a, x_c]$ nous avons $y(x) = z(x)$.*

Démonstration. Afin de démontrer ce corollaire, posons $x = x_c - \xi$ donc pour $x \in [a, x_c]$ on trouve $\xi \in [0, x - a]$. Définissons deux nouvelles fonctions,

$$y(x) = \eta(\xi) \quad \text{et} \quad z(x) = \zeta(\xi).$$

Par conséquent, il est possible de réécrire le système de telle sorte que

$$\eta'(\xi) = \Phi(\xi, \eta(\xi)),$$

et

$$\zeta'(\xi) = \Psi(\xi, \zeta(\xi)),$$

avec $\eta(0) = \zeta(0)$ étant donné que $\eta(0) = y(x_c)$, $\zeta(0) = z(x_c)$ et que par hypothèse $y(x_c) = z(x_c)$. De plus, $\Phi(\xi, \eta) = -F(x_c - \eta, n)$ et $\Psi(\xi, \eta) = -G(x_c - \xi, \eta)$. Par conséquent, $\Psi \geq \Phi$ en appliquant le théorème précédent pour $\zeta \geq \eta$ sur $[0, x_c - a]$ $(y(x) \geq z(x)\ \forall x \in [a, x_c])$. Or, par hypothèse, $y(x) \geq z(x)\ \forall x \in \Omega$ donc il est nécessaire que $y(x) = z(x)\ \forall x \in [a, x_c]$. $\square$

Ces propriétés ne sont pas, en soi, d'un si grand intérêt. Néanmoins, appliquons ces propriétés sur les deux équations suivantes provenant du système de Prufer, pour deux solutions du problème de Sturm-Liouville, l'une avec θ et l'autre avec $\hat{\theta}$ de telles sortes que nous avons

$$\begin{aligned} \theta' &= q(\sin\theta)^2 + \frac{1}{p}(\cos\theta)^2, \qquad \theta(a) = \theta_0, \\ \hat{\theta}' &= \hat{q}(\sin\hat{\theta})^2 + \frac{1}{\hat{p}}(\cos\hat{\theta})^2, \qquad \hat{\theta}(a) = \hat{\theta}_0, \end{aligned}$$

sur la région $\Omega = [a, b] \times \mathbb{R}$. Supposons que dans les deux équations précédentes, nous avons

$$q \geq \hat{q} \text{ et } p \leq \hat{p},$$

alors si $\theta_0 \geq \hat{\theta}_0$ il suit que $\theta(x) \geq \hat{\theta}(x)$ conséquence du fait que $\hat{\theta}' \leq \theta'$ sur $[a, b]$. De plus, si pour un $x_c > a$ nous avons que $\theta(x_c) = \theta(\hat{x_c})$, alors $\theta(x) = \hat{\theta}(x)$ sur $[a, x_c]$ étant donné les corollaires précédents. En effet, si on pose

$$\text{et} \quad \begin{aligned} G(x, \hat{\theta}) &= \hat{q}(\sin\hat{\theta})^2 + \tfrac{1}{\hat{p}}(\cos\hat{\theta})^2 \\ F(x, \theta) &= q(\sin\theta)^2 + \tfrac{1}{p}(\cos\theta)^2, \end{aligned}$$

il est clair que

$$\text{et} \quad \begin{aligned} \hat{\theta}' &= G(x, \hat{\theta}) \ \ \forall x \in]a, b[, \\ \theta' &= F(x, \theta). \end{aligned}$$

De plus, nous avons $\theta(a) \geq \hat{\theta}(a)$. Ces deux fonctions sont, étant donné les propriétés des problèmes de Sturm-Liouville réguliers, continues au sens de Lipschitz.

On peut obtenir une proposition plus intéressante en considérant $q > \hat{q}$ sur $]a, b[$. On obtient ainsi la proposition suivante.

Proposition 2.0.9.1 *Soit deux solutions θ et $\hat{\theta}$ de l'équation angulaire du système de Prufer avec les paramètres $\{p, q\}$ et $\{\hat{p}, \hat{q}\}$, respectivement, telles que*

$$q > \hat{q}, \ \ p \leq \hat{p} \text{ et } \theta_0 \geq \hat{\theta}_0.$$

Alors $\theta(x) > \hat{\theta}(x)$ sur l'entièreté de l'intervalle $]a, b]$.

Démonstration. Afin de démontrer cette proposition, nous utiliserons la contradiction. Supposons que $\theta(x_c) = \hat{\theta}(x_c)$ sur un intervalle $x_c \in]a, b]$. Conséquence de la proposition précédente nous pouvons conslure que $\theta = \hat{\theta}$, et ce, sur tout l'intervale $[a, x_c]$. Ainsi, sur cet intervalle

$$\theta' - \hat{\theta}' = 0,$$

de sorte que

$$q(\sin\theta)^2 + \frac{1}{p}(\cos\theta)^2 - \hat{q}(\sin\hat{\theta})^2 + \frac{1}{\hat{p}}(\cos\hat{\theta})^2 = 0.$$

Or, puisque $\theta = \hat{\theta}$, on trouve

$$(q - \hat{q})(\sin\theta)^2 + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\hat{p}}\right)(\cos\theta)^2 = 0, \qquad \forall x \in [a, x_c].$$

Chacun des deux termes est, par hypothèse, positif car $q > \hat{q}$, $p \leq \hat{p}$, $(\cos\theta)^2 \geq 0$ et $(\sin\theta)^2 \geq 0$. Par conséquent, les deux doivent s'annuler séparément pour donner zéro. Ainsi, nous avons que $\sin\theta = 0$ sur $[a, x_c]$, ce qui implique que θ est une constante dans cet intervalle. Or, l'équation décrivant la variation de θ' ne le permet pas. Ainsi, il ne peut pas y avoir un x_c tel que $\theta(x_c) = \hat{\theta}(x_c)$ et donc $\theta(x) > \hat{\theta}(x_c)$. Il est à noter que si q ne s'annule pas sur l'intervalle et si $p < \hat{p}$ on obtient le même résultat. □

Il est désormais possible de démontrer le théorème de comparaison de Sturm-Liouville.

Théorème 2.0.10 *Soit $\hat{u}$ une solution non triviale de l'équation*

$$\frac{d}{dx}\left(\hat{p}\frac{d\hat{u}}{dx}\right) + \hat{q}\hat{u} = 0$$

s'annulant au point x_1 et x_2 sur $[a, b]$ et soit u la solution de l'équation

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu = 0.$$

Supposons aussi que $q \geq \hat{q}$ et $p \leq \hat{p}$ sur $[x_1, x_2]$ alors u s'annule au moins une fois sur cet intervalle. De plus, si $\hat{u}$ possède k zéros sur cet intervalle alors u possède au moins $k-1$ zéros sur cet intervalle.

Démonstration. Avec tous les outils développés précédemment, la preuve est assez simple. Considérons les équations de Prüfer associées. Comme $\hat{u}(x_1) = 0 = r\sin(\hat{\theta}_1)$ et $r \neq 0$, on doit avoir $\sin(\hat{\theta}_1) = 0$. Sans perte de généralité, il est possible de choisir $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}(x_1) = 0$. De façon similaire, posons pour x_2 que $\hat{\theta}(x_2) = m\pi$, les seules valeurs possibles permettant à l'expression de s'annuler. La proposition (2.0.8.1) nous permet de diminuer la taille de l'ensemble valeurs de m possibles à $m > 1$. Pour ce qui est de l'équation en θ, on peut sans perte de généralité choisir $\theta(x_1) \in [0, \pi[$. Par conséquent, la condition $\theta_0 \geq \hat{\theta}_0$ de la proposition (2.0.9.1) implique

que $\theta(x_2) \geq m\pi$. Ainsi, θ doit passer par la valeur π sur l'intervalle. De sorte qu'à ce point $u = r\sin\theta = 0$. Le même raisonnement peut être appliqué au cas où $\hat{u}$ possède k zéros sur l'intervalle $[x_1, x, 2]$ (avec les bornes comprises). Dans ce cas, on trouve que u doit avoir $k-1$ zéros. $\square$

Un dernier théorème qui sera d'intérêt dans notre étude consiste à la complétude des solutions de l'équation de Sturm-Liouville. Nous avons, en effet, le théorème suivant :

Théorème 2.0.11 *L'ensemble des vecteurs propres, solutions de l'équation de Sturm-Liouville régulière, est complet dans l'espace $L_2(a,b)$, soit l'espace des fonctions de carré intégrale. Le développement d'une fonction $v \in L_2(a,b)$ par l'ensemble solution $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de l'équation de Sturm-Liouville est donné par*

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n, \qquad a_n = \int_a^b \overline{\psi_n(x)} v(x) r(x) dx. \tag{2.57}$$

La preuve de ce théorème est plutôt longue dans sa version historique. Le lecteur intéressé peut se référer au travail de Birkhoff et Rota [2].

Chapitre 3

Les séries de puissances spectrales

Le précédent chapitre visait à présenter quelques notions de base solides en ce qui a trait au problème de Sturm-Liouville. Le présent chapitre vise principalement la présentation d'une nouvelle méthode datant de 2008 pour obtenir la solution générale de l'équation de Sturm-Liouville [14, 16, 17, 18]. Cette méthode, nommée « Spectral Parameter Power Series » (SPPS), permet de trouver la solution générale du problème en considérant une solution de l'équation homogène, c'est-à-dire lorsque $\lambda = 0$. Cette représentation fut d'abord obtenue en utilisant la théorie des fonctions pseudo-analytiques, une théorie permettant de changer la « base » de l'espace complexe $(1, i)$ en une base de deux fonctions complexes (F, G) [13].

Théorème 3.0.1 (Séries de puissances à paramètres spectrales (SPPS)) *Soit p, q, r trois fonctions complexes satisfaisant certaines propriétés de régularité sur $[a, b]$ de la variable réelle x et soit u_0 une solution non triviale sur $[a, b]$ et positive de*

$$(pu_0')' + qu_0 = 0. \tag{3.1}$$

Alors, la solution générale de l'équation de Sturm-Liouville sur l'intervalle fini $[a, b]$ pouvant s'écrire comme

$$(pu')' + qu = \lambda ru, \tag{3.2}$$

est donnée par

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2, \tag{3.3}$$

où c_1, c_2 sont des constantes arbitraires complexes et u_1, u_2 sont données par

$$u_1 = u_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2k)}}{2k!} \qquad u_2 = u_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{\mathrm{X}^{(2k+1)}}{(2k+1)!}. \tag{3.4}$$

Les $\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}$ et les $\mathrm{X}^{(n)}$ de la solution précédente sont définies récursivement de telle sorte que

$$\widetilde{\mathrm{X}}^{(0)} \equiv 1, \quad \mathrm{X}^{(0)} \equiv 1, \tag{3.5}$$

$$\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}(x) = \begin{cases} n\displaystyle\int_{x_0}^{x} \widetilde{\mathrm{X}}^{(n-1)}(s)u_0^2(s)r(s)ds, & n \textit{ impair} \\ n\displaystyle\int_{x_0}^{x} \widetilde{\mathrm{X}}^{(n-1)}(s)\frac{1}{u_0^2(s)p(s)}ds, & n \textit{ pair} \end{cases} \tag{3.6}$$

et

$$\mathrm{X}^{(n)}(x) = \begin{cases} n\displaystyle\int_{x_0}^{x} \mathrm{X}^{(n-1)}(s)\frac{1}{u_0^2(s)p(s)}ds, & n \textit{ impair} \\ n\displaystyle\int_{x_0}^{x} \mathrm{X}^{(n-1)}(s)u_0^2(s)r(s)ds, & n \textit{ pair} \end{cases} \tag{3.7}$$

où x_0 est un point arbitraire dans $[a, b]$ tel que p est continue à x_0 et $p(x_0) \neq 0$.

Démonstration. La preuve est en deux étapes, dans un premier temps, il est nécessaire de montrer que (3.3) est solution de (3.2). Par la suite, on montre que (3.3) converge uniformément sur $[a, b]$. L'équation (3.2) peut s'écrire comme

$$Lu = \lambda ru, \tag{3.8}$$

où L est donné par $L = \frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q$. Cet opérateur peut être factorisé pour prendre la forme suivante $L' = \frac{1}{u_0}\frac{d}{dx}pu_0^2\frac{d}{dx}\frac{1}{u_0}$. En effet, en comparant l'action de l'opérateur sur une fonction quelconque $f(x)$ on obtient :

$$\begin{aligned} L'f &= \frac{1}{u_0}\frac{d}{dx}pu_0^2\frac{d}{dx}\frac{f}{u_0} \\ &= \frac{1}{u_0}\frac{d}{dx}pu_0^2\left(\frac{u_0(x)f'(x) - f(x)u_0'(x)}{u_0(x)^2}\right) \\ &= \big(p(x)f''(x) + f'(x)p'(x)\big) - \frac{f(x)}{u_0(x)}\left(p'(x)u_0'(x) + p(x)u_0''(x)\right). \end{aligned}$$

Or $(p'(x)u_0'(x) + p(x)u_0''(x)) = (pu_0')'$ et, comme u_0 est solution de l'équation $(pu_0')' + qu_0 = 0$, nous avons que $(p'(x)u_0'(x) + p(x)u_0''(x)) = -qu_0$. Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} L'f &= \big(p(x)f''(x) + f'(x)p'(x)\big) + \frac{f(x)}{u_0(x)}\left(qu_0(x)\right) \\ &= \big(pf'(x)\big)' - q(x)f(x) = Lf \end{aligned}$$

Sous cette forme il est facile d'appliquer L sur u_1 et u_2. Pour u_1 on obtient

$$
\begin{aligned}
Lu_1(x) &= Lu_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2k)}}{2k!} && (3.9)\\
&= \frac{1}{u_0}\frac{d}{dx} p u_0^2 \frac{d}{dx}\frac{u_0}{u_0} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2k)}}{2k!} && (3.10)\\
&= \frac{1}{u_0}\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2k-1)}}{2k-1!}\right) && (3.11)\\
&= \frac{1}{u_0}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \frac{d}{dx}\frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2k-1)}}{2k-1!}\right) && (3.12)\\
&= \frac{1}{u_0}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k u_0^2 r(x) \frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2k-2)}}{2k-2!}\right) && (3.13)\\
&= u_0 r \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2k-2)}}{2k-2!} && (3.14)\\
&= \lambda r u_1. && (3.15)
\end{aligned}
$$

On obtient donc bel et bien une solution de l'équation de Sturm-Liouville avec une énergie λ et une fonction poids r. De façon similaire, on trouve

$$Lu_2 = \lambda r u_2.$$

Par conséquent, comme l'opérateur L est linéaire on trouve bel et bien que $L(c_1u_1 + c_2u_2) = \lambda r\,(c_1u_1 + c_2u_2)$, c'est donc une solution de l'équation de Sturm-Liouville. Il suffit alors de montrer que ces deux séries convergent vers deux fonctions sur $[a, b]$. Pour $\widetilde{\mathrm{X}}^{(2)}(x)$ on a

$$\left|\widetilde{\mathrm{X}}^{(2)}(x)\right| \leq \left(\max\left|ru_0^2\right|\right)\left(\max\left|\frac{1}{pu_2^2}\right|\right)|x - x_0|^2 \tag{3.16}$$

où max est pris sur l'intervalle $[a, b]$. Ce résultat est aisément obtenu en remarquant que,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)dx\right| &\leq \int_a^b |f(x)|\,dx\\
&\leq \int_a^b \max\left(|f(x)|\right)dx\\
&\leq \max\left(|f(x)|\right)\int_a^b dx\\
&\leq |b-a| \max|f(x)|\,.
\end{aligned}
$$

Le cas général pour une « puissance » paire $2k$ est donné par l'inégalité suivante

$$\left|\widetilde{\mathrm{X}}^{(2k)}\right| \leq \left(\max\left|ru_0^2\right|\right)^k\left(\max\left|\frac{1}{pu_2^2}\right|\right)^k|x - x_0|^{2k}\,. \tag{3.17}$$

En effet, il est possible de démontrer cette inégalité en utilisant une preuve par induction. L'expression pour le cas $k = 1$ a déjà été montrée comme vraie. Supposons que cette expression est vraie pour k différent de 1, alors pour $k + 1$ on trouve,

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{\mathrm{X}}^{(2(k+1))}\right| &= \left|(2k+2)\int_{x_0}^{x} \frac{1}{u_o^2(s)p(s)}\left((2k+1)\int_{x_0}^{s} \widetilde{\mathrm{X}}^{(2k)}(t)u_0^2(t)r(t)dt\right)ds\right| && (3.18)\\
&= \frac{(2k+2)!}{(2k)!}\int_{x_0}^{x}\left|\frac{1}{u_0^2(s)p(s)}\left(\int_{x_0}^{s} \widetilde{\mathrm{X}}^{(2k)}(t)u_0^2(t)r(t)dt\right)\right|ds && (3.19)\\
&\leq \frac{(2k+2)!}{(2k)!}\max\left|\frac{1}{u_0^2 p}\right|\int_{x_0}^{x}\max\left|\left(\int_{x_0}^{s} \widetilde{\mathrm{X}}^{(2k)}(t)u_0^2(t)r(t)dt\right)\right|ds && (3.20)\\
&\leq \frac{(2k+2)!}{(2k)!}\max\left|\frac{1}{u_0^2 p}\right|\max\left|u_0^2 r\right|\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{s}\max\left|\widetilde{\mathrm{X}}^{(2k)}(t)\right|dt\right)ds && (3.21)\\
&\leq \frac{(2k+2)!}{(2k)!}\max\left|\frac{1}{u_0^2 p}\right|^{k+1}\max\left|u_0^2 r\right|^{k+1}\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{s}|x-x_0|^{2k}\,dt\right)ds && (3.22)\\
&\leq \max\left|\frac{1}{u_0^2 p}\right|^{k+1}\max\left|u_0^2 r\right|^{k+1}|x-x_0|^{2k+2}. && (3.23)
\end{aligned}$$

L'inégalité est donc, par induction, valide pour tous les $k \geq 1$. Par conséquent, la suite est bel et bien bornée par le terme (3.17). La série contenue dans l'expression pour u_2 peut être bornée par

$$u_2 \leq u_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{(2k)!},$$

où c est donné par

$$c = |\lambda| \max\left|u_0^2 r\right|\left(\max\left|\frac{1}{u_0^2 p}\right|\right)|x-x_0|^2.$$

Puisque pour un x fini, c est fini et on trouve que la série est donnée par

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^k}{(2k)!} = \cosh(\sqrt{c}) - 1 < \infty.$$

Ce qui démontre que la série converge. La convergence de la série u_1 est obtenue de façon similaire. Bien que les deux fonctions convergent et sont solutions de l'équation différentielle, rien n'indique qu'elles sont linéairement indépendantes l'une de l'autre. Leur indépendance linéaire est nécessaire pour prouver que la somme des deux fonctions représente la solution générale de l'équation. Pour se faire, il est possible de montrer que le Wronskien est non nul en au moins un point sur le segment $[a, b]$. Comme n'importe quel point peut suffire, il est

possible d'utiliser le point x_0. Les composantes du Wronskien sont données par :

$$
\begin{aligned}
u_1(x_0) &= u_0(x_0)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2k)}(x_0)}{2k!} = u_0(x_0)\\
u_1'(x_0) &= u_0'(x_0)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2k)}(x_0)}{2k!} + u_0(x_0)\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2k-1)}(x_0)}{u_0^2(x)p(x)(2k)!} = u_0'(x_0)\\
u_2(x_0) &= u_0(x_0)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{\mathrm{X}^{(2k+1)}(x_0)}{2k+1!} = 0\\
u_2'(x_0) &= u_0'(x_0)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{\mathrm{X}^{(2k+1)}(x_0)}{2k+1!} + u_0(x_0)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{\mathrm{X}^{(2k)}(x_0)}{u_0^2(x_0)p(x_0)(2k)!}\\
&= 0 + \frac{1}{u_0(x_0)}.
\end{aligned}
$$

Le Wronskien évalué à $x = x_0$ est alors donné par

$$
W(x_0) = \begin{vmatrix} u_1(x_0) & u_1'(x_0) \\ u_2(x_0) & u_2'(x_0) \end{vmatrix} = u_1(x_0)u_2'(x_0) - u_1'(x_0)u_2(x_0) = \frac{1}{p(x_0)}. \tag{3.24}
$$

Comme nous avons comme condition que $\frac{1}{p(x_0)}$ soit continue sur $[a, b]$, le Wronskien est donc bel et bien non nul. Par conséquent, la solution (3.3) représente bel et bien la solution générale de (3.2). □

Cette méthode de solution de (3.2) demande de connaître une solution pour le paramètre spectral $\lambda = 0$. Dans le cas régulier, de telles fonctions sont faciles à construire.

Des méthodes similaires peuvent être construites afin de résoudre les problèmes de Sturm-Liouville d'ordre supérieur [11]. Plusieurs autres généralisations de cette méthode existent [12]. Le théorème précédent est également valide lorsque l'on considère comme solution u_0 une solution de paramètre spectral différent de $\lambda = 0$, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 3.0.2 (SPPS bis) *Soit λ_0, un paramètre spectral non nul et u_0 une solution de l'équation*

$$(pu_0')' + qu_0 = \lambda_0 r u_0.$$

Alors la solution générale u prend la forme

$$u = c_1u_1 + c_2u_2,$$

où,

$$u_1 = u_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda_0)^k}{2k!}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2k)}, \quad u_2 = u_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda_0)^k}{2k+1!}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2k+1)}. \tag{3.25}$$

Démonstration. On peut considérer l'équation différentielle suivante :

$$(L - \lambda_0 r)u = (\lambda - \lambda_0)ru, \tag{3.26}$$

qui revient exactement à notre équation initiale $Lu = \lambda ru$.

L'opérateur $(L - \lambda_0 r)$ peut aussi s'écrire sous la forme de (3.9) de telle sorte que

$$(L - \lambda_0 r)f = \frac{1}{u_0}\frac{d}{dx}pu_0^2\frac{d}{dx}\frac{f}{u_0}. \tag{3.27}$$

La preuve est, à partir de ce point, similaire à la preuve du théorème précédent et engendre les séries (3.25). □

3.1 Le problème spectral

Comme nous avons vu, la technique des séries spectrales permet une représentation efficace par des intégrales itérées de la forme (3.6) et de la forme (3.7). Elle permet aussi de déterminer les valeurs du paramètre spectral λ possibles pour des conditions aux frontière données.

Exemple 3.1.0.1 *Soit le problème spectral régulier avec conditions aux frontières suivantes :*

$$\begin{aligned}(pu')' + qu = \lambda ru, \quad & r(x) \in \mathbb{R},\, x \in [0,1] \\ & u(0) = 0,\, u(1) = 0.\end{aligned}$$

La fonction u_0 peut s'obtenir facilement dans le domaine $[0,1]$. Le problème $(pu_0')' + qu_0 = 0$ possède deux fonctions linéairement indépendantes v_1, v_2 possédant des zéros alternants comme il sera montré dans un théorème subséquent. Par conséquent, la fonction $u_0 = v_1 + iv_2$ solutionne l'équation différentielle et ne possède pas de zéro dans le domaine $[0,1]$. Le choix de x_0 est arbitraire et peut être fait de telle sorte que $x_0 = 0$ soit la borne inférieure du domaine.

Les équations obtenues en (3.24) montrent que $u(x_0) = c_1 u_0(x_0)$. Or, $u(0) = 0$ et $u_0 \neq 0$ par construction, ainsi $c_1 = 0$. Par conséquent, le problème spectral se résume à trouver les λ tels que

$$u(1) = c_2 u_2(1) = c_2 u_0(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{2k+1!} \widetilde{\mathrm{X}}^{(2k+1)}(1) = 0.$$

Or, nous avons $c_2 \neq 0$ et $u_0(1) \neq 0$. Par conséquent, pour trouver les λ il suffit de déterminer les zéros de la fonction

$$\kappa(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \lambda^m,$$

où les a_m sont donnés par $a_m = u_0(1)\mathrm{X}^{(2m+1)}(1)$.

On peut facilement généraliser cet exemple au cas général

$$(pu')' + qu = \lambda ru, \quad r \in \mathbb{R},\, x \in [a,b], \tag{3.28}$$

$$u(a)\cos(\alpha) + u'(a)\sin(\alpha) = 0, \tag{3.29}$$

$$u(b)\cos(\beta) + u'(b)\sin(\beta) = 0. \tag{3.30}$$

Encore une fois, en choisissant $x_0 = a$ comme la borne inférieure du domaine, il est possible d'utiliser les relations obtenues en (3.24). Ainsi $u(b)\cos(\beta) + u'(b)\sin(\beta) = 0$ devient

$$c_1 \left(u_0(a)cos(\alpha) + u_0' \sin(\alpha)\right) + c_2 \frac{\sin(\alpha)}{u_0(a)p(a)} = 0,$$

lorsque $\alpha = \pi n$, $c_1 = 0$. Dans le cas $\alpha \neq \pi n$, la relation est donnée par

$$c_2 = \gamma c_1$$

avec $\gamma = -u_0(a)p(a)\left(u_0(a)\cot(a) + u_0'(a)\right)$. La dérivée de u_1, u_2 est donnée par

$$u_1' = \frac{u_0'}{u_0}u_1 + \frac{1}{u_0 p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(2k-1)!}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2k-1)}, \;\; u_2' = \frac{u_0'}{u_0}u_2 + \frac{1}{u_0 p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{2k!}\mathrm{X}^{(2k)}. \tag{3.31}$$

Par conséquent, la valeur à la frontière $x = b$ est donnée par

$$u(b)\cos(\beta) + u'(b)\sin(\beta) = 0, \tag{3.32}$$

$$(c_1 u_1(b) + c_2 u_2(b))\cos(\beta) + (c_1 u_1'(b) + c_2 u_2'(b))\sin(\beta) = 0, \tag{3.33}$$

$$\left(u_0(b)\cos(\beta) + u_0'(b)\sin(\beta)\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\left(\frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2k)}(b)}{2k!} + \gamma\frac{\mathrm{X}^{(2k+1)}(b)}{2k+1!}\right)\right), \tag{3.34}$$

$$+\frac{\sin(\beta)}{u_0(b)p(b)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\left(\frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2k-1)}(b)}{2k-1!} + \gamma\frac{\mathrm{X}^{(2k)}(b)}{2k!}\right)\right) = 0. \tag{3.35}$$

Ce problème peut aussi s'écrire sous la forme $\kappa(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \lambda^m$ où

$$a_0 = \left(u_0(b)\cos(\beta) + u_0'(b)\sin(\beta)\right)\left(1 + \gamma\mathrm{X}^{(1)}(b)\right) + \frac{\gamma\sin(\beta)}{u_0(b)p(b)}, \tag{3.36}$$

$$a_m = \left(u_0(b)\cos(\beta) + u_0'(b)\sin(\beta)\right)\left(\widetilde{\mathrm{X}}^{(2m)}(b) + \gamma\mathrm{X}^{(2m+1)}(b)\right) + \frac{\gamma\sin(\beta)}{u_0(b)p(b)}. \tag{3.37}$$

Cette façon de poser le problème permet d'approximer numériquement, voire analytiquement, les valeurs propres λ. En effet, il suffit de tronquer la série $\kappa(\lambda)$ à un N noté $\kappa_N(\lambda)$ et de trouver les premiers zéros du polynôme de Taylor

$$\kappa_N(\lambda) = \sum_{m=0}^{N} a_m \lambda^m = 0. \tag{3.38}$$

Ces zéros convergent vers les zéros du problème initial.

3.2 Le cas de l'équation de Schrödinger

Cette section mettra l'accent sur un cas particulier du problème de Sturm-Liouville propre à la physique quantique. Nous étudierons dans le détail l'équation de Schrödinger.

Considérons un problème simple de la mécanique classique. Soit une particule au sens de Newton (ponctuelle et non relativiste) avec une masse m sujette à un champ de force $\vec{F}$.

Sachant l'expression du champ de force pour tout temps t et pour toutes positions et sachant la position et l'impulsion de la particule à un temps t_0, il est possible, grâce à la physique classique, de déterminer la position $\vec{q}(t)$ et l'impulsion $\vec{p}(t)$ de la particule pour tout temps t ainsi que toute autre quantité physique dite mécanique. L'équation déterminant l'évolution de ces quantités est donnée simplement par

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

et

$$\vec{p} = \frac{d\vec{q}}{dt}.$$

En mécanique classique toutes les quantités mécaniques u peuvent s'exprimer comme une combinaison de la position et du moment telle que

$$u = u(\vec{q}, \vec{p}).$$

Une façon de traiter le problème en mécanique quantique est au travers de la fonction d'onde et l'équation de Schrödinger. En mécanique quantique l'information sur un système quantique est contenue dans ce qui est appelé la fonction d'onde notée $\Psi(\vec{r}, t)$ et non pas par la position $\vec{q}$ de la particule et par son impulsion $\vec{p}$. Pour une particule isolée, par exemple, la position et l'impulsion de la particule ne peuvent pas être déterminées simultanément dans le régime quantique. La connaissance complète de l'un implique une absence totale de la connaissance de l'autre. L'équation pour une particule isolée dans un potentiel évoluant dans le temps est donnée par

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) \right] \Psi(\vec{r}, t),$$

où $\hbar$ est la constante de Planck, m la masse de la particule et ∇^2 est le laplacien défini par

$$\nabla^2 \phi = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \phi \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.$$

$V(\vec{r}, t)$ est une fonction du temps et de la position que l'on nomme le potentiel, il est analogue au potentiel classique qui, pour rappel, génère une force sur la particule proportionnelle à son gradient. L'impulsion de la particule est représentée par l'opérateur $\hat{p}$ et, l'opérateur hamiltonien $\hat{H}$ indépendant du temps, est donné par

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x), \qquad \hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}.$$

L'opérateur hamiltonien correspond à l'énergie de la particule. Dans le cas de la mécanique classique, l'hamiltonien est la transformée de Legendre du Lagrangien et est donné par $H_{class} = E = T + V$. L'hamiltonien est égale à l'énergie, soit la somme de l'énergie potentielle V et de l'énergie cinétique T. Dans le cas de la mécanique quantique, l'opérateur $\frac{\hat{p}^2}{2m}$ agit comme la quantité d'énergie cinétique et $V(x)$ comme l'énergie potentielle. La différence principale réside

dans le fait que H_{class} est un scalaire et H_{quant} est un opérateur agissant sur une fonction d'onde. Cet opérateur quantique H_{quant} est, lui aussi, lié à l'énergie à partir de l'équation aux valeurs propres suivante :

$$\hat{H}\Psi = E\Psi.$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation de Schrödinger. L'application de l'hamiltonien sur la fonction d'onde renvoit la fonction d'onde multipliée par l'énergie du système. Le lecteur attentif remarquera le lien évident entre l'équation de Schrödinger et le problème de Sturm-Liouville avec conditions aux frontières. En une dimension et dans la base spatiale, l'équation de Schrödinger indépendante du temps prend la forme

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\Psi(x) = E\Psi(x).$$

En effectuant la substitution $x' = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}x$ on retombe sur le problème de Sturm-Liouville avec $q = -v(x), p = 1$, $\lambda = E$ et $\omega(x) = 1$. Les conditions frontière sur la fonction d'onde dépendent du problème. Cependant, le problème implique souvent que l'équation d'onde s'annule quelque part ou qu'elle possède une certaine valeur et dérivée par souci de continuité avec une autre solution. Il est possible d'interpréter l'amplitude au carré de la fonction d'onde $\Psi(x)\Psi(x)^*$ ($\Psi(x)^2$ lorsque la solution est prise réelle) par la densité de probabilité de présence de la particule. Pour l'équation de Schrödinger les puissances Φ-généralisées deviennent des puissances Ψ_0^2-généralisées, où Ψ_0 est la solution de l'équation lorsque $E = 0$ et s'écrivent comme

$$\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}(x) = \begin{cases} n\displaystyle\int_{x_0}^{x} \widetilde{\mathrm{X}}^{(n-1)}(s)\Psi_0^2(s)ds, & n \text{ impair} \\ n\displaystyle\int_{x_0}^{x} \widetilde{\mathrm{X}}^{(n-1)}(s)\frac{1}{\Psi_0^2(s)}ds, & n \text{ pair} \end{cases} \tag{3.39}$$

et

$$\mathrm{X}^{(n)}(x) = \begin{cases} n\displaystyle\int_{x_0}^{x} \mathrm{X}^{(n-1)}(s)\frac{1}{\Psi_0^2(s)}ds, & n \text{ impair} \\ n\displaystyle\int_{x_0}^{x} \mathrm{X}^{(n-1)}(s)\Psi_0^2(s)ds, & n \text{ pair.} \end{cases} \tag{3.40}$$

Par simplicité, nous noterons $\Phi = \Psi_0^2$ pour la suite de ce travail. Afin de donner un exemple concret à ces définitions, un problème simple sera présenté soit le cas du puits de potentiel carré infini, aussi appelé le cas de la particule dans une boîte.

3.3 Particule dans une boîte à une dimension

La forme la plus simple de potentiel sera considérée dans cet exemple. Une particule libre selon l'axe x se trouve entre deux murs de potentiel infini. Le potentiel à l'intérieur de ces deux murs est nul. Ainsi, aucune force n'agit sur la particule lorsqu'elle est à l'intérieur de ces deux murs puisque le potentiel est constant. À la jonction avec les murs infinis, une force infinie renvoie la

particule au centre du puits. La dérivée est alors discontinue, mais en considérant la fonction potentielle au sens d'une distribution, elle peut être considérée infinie. Le potentiel $q(x)$ est alors donné par

$$q(x) = \begin{cases} 0, & x_c - \frac{L}{2} < x < x_c + \frac{L}{2}, \\ \infty, & \text{ailleurs}, \end{cases}$$

où L est la largeur du puits et x_c est le centre du puits. L'équation différentielle gouvernant la particule dans le cas stationnaire à l'intérieur du puits est donnée par

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = \lambda\psi(x).$$

Etant donné le potentiel infini aux murs du puits, la probabilité de présence de la particule doit être nulle. Ce ne serait pas le cas pour un potentiel fini, une partie de la fonction d'onde s'échapperait du puits. Contrairement au problème classique, la particule pourrait alors sortir du puits même si son énergie était inférieure aux murs de potentiel. Il y aurait alors une légère probabilité de trouver la particule dans cette zone, même si l'énergie de celle-ci ne lui permettrait pas d'y accéder de façon classique. Les conditions aux frontières pour ce problème sont donc :

$$\psi\left(x_c - \frac{L}{2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \psi\left(x_c + \frac{L}{2}\right) = 0.$$

Il est aisé de trouver une solution Ψ_0 à l'équation homogène ($\lambda = 0$) qui devient alors simplement $\frac{d^2}{dx^2}\Psi_0(x) = 0$. La solution générale est de la forme

$$\psi_0(x) = a_1 + a_2 x \quad \text{pour} \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C}.$$

Il n'est pas nécessaire que cette solution suive les conditions frontières du problème non homogène puisqu'en général la solution d'énergie nulle ne fait pas partie de l'espace vectoriel des solutions du problème de Sturm-Liouville. En effet, dans ce cas-ci on trouverait $a_1 = 0 = a_2$. Par souci de simplicité, il est possible de choisir $x_c = \frac{1}{2}, \frac{L}{2} = \frac{1}{2}$ et $x_0 = 1$ afin de créer un puits entre $x = 0$ et $x = 1$. Les fonctions $\mathrm{X}^{(n)}$ et $\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}$ peuvent ainsi être calculées relativement facilement. Pour les premières puissances, on obtient :

$$\mathrm{X}^{(1)}(x) = \int_1^x (a_1 + a_2 s)^{-2}\, ds = \frac{x-1}{(a_1+a_2)(a_1+a_2 x)},$$

$$\mathrm{X}^{(2)}(x) = \int_1^x \frac{s-1}{(a_1+a_2)(a_1+a_2 s)}(a_1+a_2 s)^2\, ds = \frac{(x-1)^2(3a_1+a_2+2a_2 x)}{6(a_1+a_2)},$$

$$\mathrm{X}^{(3)}(x) = \frac{(x-1)^3(3a_1+a_2+2a_2 x)}{6(a_1+a_2)^2(a_1+a_2 x)}.$$

Il n'y a, en réalité, aucun besoin de prendre la solution $\psi_0(x) = a_1 + a_2 x$. La solution $\psi_0(x) = a_2 x$ est tout aussi satisfaisante et beaucoup plus facile à calculer. On obtient ainsi dans le cas

général,

$$\mathrm{X}^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^k}{xa_2^2}, & k \quad \text{impair} \\ \frac{1}{k+1}(x-1)^k(1+kx), & k \quad \text{pair.} \end{cases}$$

Pour $\widetilde{\mathrm{X}}^{(k)}(x)$ on obtient,

$$\widetilde{\mathrm{X}}^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{a_2^2}{k!(k+2)}(x-1)^k\left(1+kx+x^2\right), & k \quad \text{impair} \\ \frac{1}{(k+1)!x}(x-1)^k(k+x), & k \quad \text{pair} \end{cases}$$

Par conséquent, pour u_2 on trouve

$$\begin{aligned} u_2 &= \psi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathrm{X}^{(2k+1)}(x) = a_2 x \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left(\frac{(x-1)^{2k+1}}{xa_2^2} \right) \\ &= \frac{\sinh\left[(x-1)\sqrt{\lambda}\right]}{a_2\sqrt{\lambda}}. \end{aligned}$$

En procédant de la même façon pour u_1,

$$\begin{aligned} u_1 &= \psi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \widetilde{\mathrm{X}}^{(2k)}(x) = (a_2 x) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{1}{(2k+1)!x}(x-1)^{2k}(2k+x) \\ &= \frac{(a_2 x)\left(\sqrt{\lambda}\cosh\left[(x-1)\sqrt{\lambda}\right] + \sinh\left[(x-1)\sqrt{\lambda}\right]\right)}{x\sqrt{\lambda}}. \end{aligned}$$

Les conditions aux frontières permettent de déterminer les valeurs de λ et la valeur de a_2 nécessaire. Pour u_2 nous avons,

$$\begin{aligned} & u_2(0) = 0, \quad u_2(1) = 0 \\ & u_2(0) = -\frac{\sinh\left[\sqrt{\lambda}\right]}{a_2\sqrt{\lambda}} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \lambda = -(\pi n)^2 \\ & u_2(1) = \frac{\sinh[0]}{a_2\sqrt{\lambda}} = 0 \end{aligned}$$

On peut choisir $a_2 = i$ afin d'obtenir une équation d'onde réelle. Le théorème (3.3.2) présenté dans la prochaine section montrera qu'il est toujours possible de choisir la solution de l'équation de Schrödinger en une dimension réelle. La solution u_1 ne peut être utilisée, car elle est divergente à $x = 0$. Cela ne peut pas représenter une interprétation valide, car la solution doit être de carré sommable afin que la densité de probabilité soit normalisable (probabilité de 1 de trouver la particule sur le domaine). La solution peut alors s'écrire, une fois normalisée, comme

$$u = \frac{c_2}{\sqrt{\lambda_n}} \sin(\pi n x), \quad \lambda_n = n^2\pi^2, \quad c_2 = \sqrt{2n\pi}.$$

C'est évidemment la solution qui aurait été trouvée en utilisant une technique de résolution standard. Le prochain théorème montre qu'il n'existe pas d'état d'énergie E pour laquelle il y a plus d'une solution d'onde possible. Cela est toutefois possible en dimension supérieure à un, nous dirons alors qu'elles sont dégénérées.

Théorème 3.3.1 *Il n'y a pas de niveau d'énergie dégénéré pour une particule liée de l'équation de Schrödinger unidimensionnelle stationnaire avec conditions aux frontières adéquates.*

Démonstration. Supposons qu'il y ait deux solutions ψ_1 et ψ_2 avec la même énergie λ. Alors,

$$\begin{aligned}\psi_1'' + q(x)\psi_1 &= \lambda\psi_1\\ \psi_2'' + q(x)\psi_2 &= \lambda\psi_2.\end{aligned}$$

Si l'on multiplie chacune d'elle par la solution opposée et que l'on soustrait les deux équations, on trouve,

$$\psi_2\psi_1'' - \psi_1\psi_2'' = 0.$$

Or le terme de gauche n'est autre que la dérivé de $\psi_2\psi_1' - \psi_1\psi_2'$ de sorte que

$$(\psi_2\psi_1' - \psi_1\psi_2')' = 0 \Rightarrow \psi_2\psi_1' - \psi_1\psi_2' = C_1 \quad \text{où } C_1 \text{ est une constante.}$$

Si on suppose que la fonction d'onde est normalisable, la constante C_1 doit être nulle car il existe au moins un point où $\psi_1 = 0 = \psi_2$. Dans le cas d'une fonction d'onde définie sur la droite des réelles nous aurons, par exemple, que $\lim_{x\to\pm\infty}\psi = 0$. Nous obtenons donc que

$$\psi_2\psi_1' = \psi_1\psi_2' \Rightarrow \frac{d}{dx}(\log\psi_1 - \log\psi_2) = 0.$$

Ce qui implique que

$$\psi_1 = C_2\psi_2,$$

où C_2 est une constante complexe. Par conséquent, la fonction ψ_2 est, à une constante près, la fonction ψ_1. Du point de vue physique, ce sont donc la même fonction d'onde. □

Le prochain théorème montre le côté arbitraire de cette constante pour le problème de Schrödinger en une dimension.

Théorème 3.3.2 *Pour tout potentiel q réel (opérateur hermitien) les fonctions d'ondes de l'équation de l'équation de Schrödinger peuvent être choisies comme étant réelles.*

$$u_0(x), u_1(\lambda, x), u_2(\lambda, x) \in \mathbb{R}$$

Démonstration. Supposons que ψ est solution de l'équation de Schrödinger et que ψ^* est son complexe conjugué. Alors,

$$\begin{aligned}\psi'' + q(x)\psi &= \lambda\psi \\ (\psi^*)'' + q(x)\psi^* &= \lambda\psi^*\end{aligned}$$

Comme $q(x)$ est une fonction réelle et que λ est aussi réelle, ψ^* est solution de l'équation de Schrödinger tout comme ψ. Il est alors possible de construire, à partir de ces deux éléments, deux fonctions ψ_{r_1} et ψ_{r_2} réelles solutions de l'équation de telle sorte que

$$\psi_{r_1} = \frac{1}{2}(\psi + \psi^*) \text{ et } \psi_{r_2} = \frac{1}{2i}(\psi - \psi^*).$$

Il est facile de montrer que ces deux combinaisons linéaires sont solutions de l'équation de Schrödinger. Or ces deux solutions sont à une constante multiplicative près l'une de l'autre. Cette constante c est nécessairement réelle de telle sorte que

$$\psi_{im} = c\psi_r.$$

Par le principe de superposition, énonçant que les combinaisons linéaires de solutions d'une équation linéaire sont aussi solutions de cette même équation linéaire, on trouve que

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_r + i\psi_{im} \\ &= (1 + ic)\psi_r = \sqrt{1 + c^2}e^{i\beta}\psi_r.\end{aligned}$$

On peut, par conséquent, choisir le paramètre β de façon à ce que le reste de la solution soit réelle. □

Le prochain théorème présente l'aspect oscillatoire des solutions de l'équation de Schrödinger en une dimension.

Théorème 3.3.3 *Le nombre de zéros de la solution de l'équation de Schrödinger pour le k-ième plus petit niveau d'énergie λ_k dans l'intervalle $[a, b]$ est donné par k, de telle sorte que pour le premier niveau (λ_1 on trouve un zéro et aucun zéro pour la solution à énergie nulle ($\lambda = 0$).*

Démonstration. La preuve habituelle se base sur la théorie de Sturm-Liouville. Le théorème de comparaison (2.0.10) implique que deux solutions linéairement indépendantes de l'équation de Sturm-Liouville alternent et que si ψn_1 et ψn_2 sont telles que $\lambda_{n_1} < \lambda_{n_2}$, alors entre chaque zéro de ψ_{n_2} il y a un zéro de ψ_{n_1}. En montrant qu'il n'y a qu'un seul zéro dans la solution pour λ_1, il est possible de montrer par induction que le nombre de zéros est égal à k. □

Comme l'équation de Schrödinger est un problème de Sturm-Liouville particulier, tous les théorèmes du chapitre 2 sont applicables. Une preuve plus visuelle et intuitive peut aussi être obtenue. Un exemple concret peut être trouvé dans [23].

Le prochain théorème montre comment l'équation de Schrödinger peut être réécrite en termes d'intégrales et de la puissance généralisée $\mathrm{X}^{(1)}$.

Théorème 3.3.4 *Soit u_1 et u_2 deux fonctions aux équations intégrales suivantes :*

$$u_1 = \sqrt{\phi}\left(1 + \lambda \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\phi(q)} \int_{x_0}^{q} \sqrt{\phi(s)} u_1(s) ds dq\right) \tag{3.41}$$

et

$$u_2 = \sqrt{\phi}\left(\mathrm{X}^{(1)} + \lambda \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\phi(q)} \int_{x_0}^{q} \sqrt{\phi(s)} u_2(s) ds dq\right). \tag{3.42}$$

Alors u_1 et u_2 sont deux solutions de l'équation de Schrödinger de la forme (3.4) avec $p = r = 1$ et $\Psi_0^2 = \Phi$.

Démonstration. La preuve se fait aisément par suite d'approximation. Supposons que u_1 respecte

$$u_1 = \sqrt{\phi}\left(1 + \lambda \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\phi(q)} \int_{x_0}^{q} \sqrt{\phi(s)} u_1(s) ds dq\right),$$

alors en utilisant la méthode d'approximation de Picard et en évitant d'indiquer les dépendances afin d'alléger la présentation on obtient

$$\begin{aligned}
u_1 &= \sqrt{\phi}\left(1 + \lambda \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\phi} \int \sqrt{\phi}\left(\sqrt{\phi}\left(1 + \lambda \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\phi} \int \sqrt{\phi} u_1\right)\right)\right) \\
&= \sqrt{\phi}\left(1 + \lambda \int \frac{1}{\phi} \int \phi + \lambda^2 \int \frac{1}{\phi} \int \phi \int \frac{1}{\phi} \int \sqrt{\phi} u_1\right) \\
&= \sqrt{\phi}\left(1 + \frac{\lambda \widetilde{\mathrm{X}}^{(2)}}{2!} + \lambda^2 \int \frac{1}{\phi} \int \phi \int \frac{1}{\phi} \int \sqrt{\phi} u_1\right) \\
&\vdots \\
&= \sqrt{\phi}\left(1 + \frac{\lambda \widetilde{\mathrm{X}}^{(2)}}{2!} + \frac{\lambda^2 \widetilde{\mathrm{X}}^{(4)}}{4!} + \cdots\right).
\end{aligned}$$

Or, cette série est solution de l'équation de Schrödinger en vertu de (3.4). La solution pour u_2 est analogue. Ces deux solutions sont convergentes en conséquence de l'inégalité (3). □

Ces deux équations possèdent une interprétation physique intéressante. Chacune d'elle se présente sous la forme d'une perturbation proportionnelle à l'énergie (paramètre spectral λ) sous forme d'opérateur intégral appliqué à la solution. Lorsque $\lambda = 0$ la perturbation est

nulle et on retrouve les solutions homogènes. L'équation pour u_1 donne alors $u_1 = \sqrt{\phi}$ et l'équation pour u_2 donne $\sqrt{\phi}\mathrm{X}^{(1)}$. Cette expression est bien connue et est utilisée sous la forme $u_2 = \sqrt{\phi}\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\phi(s)} ds$ depuis longtemps afin d'obtenir une solution linéairement indépendante à u_1 pour le problème homogène.

La prochaine section du mémoire s'intéressera aux puissances Φ-généralisés définies par (3.39).

Chapitre 4

Les puissances Φ-généralisées

4.1 Définitions et propriétés

Dans un premier temps la définition des fonctions de puissances Φ-généralisées sera donnée.

Définition 4.1.0.1 *Soit $\Phi(x)$ une fonction non nulle à valeurs complexes continue sur l'intervalle $[a,b]$ et $x_0 \in [a,b]$. Les puissances Φ-généralisées sont définiees de façon itérative de telle sorte que $\widetilde{\mathrm{X}}^{(0)}(x_0,x) \equiv 1 \equiv \mathrm{X}^{(0)}(x_0,x)$ et*

$$\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}(x_0,x) := n\int_{x_0}^{x} \widetilde{\mathrm{X}}^{(n-1)}(x_0,\xi)\left(\frac{1}{\Phi(\xi)}\right)^{(-1)^n} d\xi, \tag{4.1}$$

$$\mathrm{X}^{(n)}(x_0,x) := n\int_{x_0}^{x} \mathrm{X}^{(n-1)}(x_0,\xi)\left(\Phi(\xi)\right)^{(-1)^n} d\xi, \tag{4.2}$$

où $n > 0$. La puissance Φ-généralisée $\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}$ est appelée le Φ-conjugué de $\mathrm{X}^{(n)}$ (et inversement).

Remarque *La Φ-conjugaison des puissances généralisées est obtenue par la transformation $\mathcal{R}_\Phi\left[\mathrm{X}^{(n)}\right] = \widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}$ et $\mathcal{R}_\Phi\left[\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}\right] = \mathrm{X}^{(n)}$. Cet opérateur sera utilisé dans les chapitres subséquents pour obtenir le partenaire supersymétrique de l'équation de Schrödinger unidimensionnelle. Il a pour effet d'intervertir les instances de $\frac{1}{\Phi}$ en Φ et vice-versa.*

Ces fonctions de puissances sont très similaires aux puissances standards (monômes) x^n comme le montre la remarque suivante.

Remarque *Dans le cas de $\Phi \equiv 1$, nous avons que $\mathrm{X}^{(n)}(x_0,x) = \widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}(x_0,x)$ et ces fonctions sont égales à $(x-x_0)^n$. Dans le cas général, les puissances Φ-généralisées $\mathrm{X}^{(n)}$ et $\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}$ sont distinctes et non polynomiales.*

Ces puissances généralisées sont en général difficiles à calculer pour obtenir une expression explicite pour tous les n. Pour certaines fonctions Φ il est cependant possible de calculer quelques termes et de trouver par induction la formule générale. Un cas assez important

correspondant à une petite perturbation appliquée à Φ est considéré dans l'exemple qui suit. La perturbation apparaît au carrée, conséquence du fait qu'elle provient de la perturbation d'une certaine fonction d'onde Ψ.

Exemple 4.1.0.1 *Considérons le cas $\Phi(x) = (1+\alpha x)^2$, néanmoins on trouve*

$$\mathrm{X}^{(n)}(x_0,x) = \begin{cases} \frac{(x-x_0)^n}{(1+\alpha x)(1+\alpha x_0)}, & n \text{ impair}, \\ \frac{(x-x_0)^n(n+1+\alpha(nx+x_0))}{(n+1)(1+\alpha x_0)}, & n \text{ pair} \end{cases}$$

$$\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}(x_0,x) = \begin{cases} \frac{(x-x_0)^n\left(n+2+\alpha(n+2)(x+x_0)+\alpha^2\left(x^2+nxx_0+x_0^2\right)\right)}{n+2}, & n \text{ impair}, \\ \frac{(x-x_0)^n(n+1+\alpha(x+nx_0))}{(n+1)(1+\alpha x)}, & n \text{ pair}. \end{cases}$$

Chacune de ces expressions est sous la forme d'une perturbation à la puissance pour $\Phi = 1$. Cette perturbation de plus ne s'annule pas pour $x_0 = x$. Toutes ces réalisations seront démontrées dans les prochains chapitres en se servant d'une idée due à Volterra.

Le prochain théorème semble trivial à démontrer à première vue. Néanmoins, il demande l'utilisation de la théorie des intégrales itérées présentée au chapitre 1. Il démontre que $\mathrm{X}^{(n)}$ et $\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}$ sont symétriques (au sens du Φ-conjugué) ou antisymétriques selon la parité de n.

Théorème 4.1.1 *Soit $\mathrm{X}^{(n)}$ et $\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}$ des fonctions de puissances Φ-généralisées. Ces fonctions sont conjuguées Φ-symétriques pour n pair et antisymétriques pour n impair, i.e.*

$$\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}(x_0,x) = \mathrm{X}^{(n)}(x,x_0), \qquad n \text{ pair} \tag{4.3}$$

et

$$\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}(x_0,x) = -\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}(x,x_0), \qquad n \text{ impair} \tag{4.4}$$

$$\mathrm{X}^{(n)}(x_0,x) = -\mathrm{X}^{(n)}(x,x_0), \qquad n \text{ impair}. \tag{4.5}$$

Démonstration. Soit $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ des fonctions continues à valeurs complexes sur $[a,b]$ telles que $f_i(x) \neq 0\ \forall x \in [a,b]$. En utilisant la proposition (1.1.0.1) on trouve que

$$\int_x^{x_0} f_1(\xi)d\xi \cdots f_n(\xi)d\xi = (-1)^n \int_{x_0}^{x} f_n(\xi)d\xi \cdots f_1(\xi)d\xi.$$

Dans le cas particulier où

$$f_n = \left(\frac{1}{\Phi}\right)^{(-1)^n} \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

alors l'équation devient

$$\frac{1}{n!}\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}(x,x_0) = \begin{cases} -\frac{1}{n!}\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}(x_0,x), & n \text{ impair} \\ \frac{1}{n!}\mathrm{X}^{(n)}(x_0,x), & n \text{ pair}. \end{cases}$$

La même procédure peut être effectuée pour le cas $\mathrm{X}^{(n)}$ en considérant $f_n(x) = \Phi^{(-1)^n}$. $\square$

En plus de la relation entre les fonctions de puissances Φ-généralisées et les puissances standards $(x-x_0)^n$, il existe également une relation intéressante entre l'intégration des puissances $\left(\mathrm{X}^{(1)}\right)^k$, $\left(\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}\right)^k$ et les puissances $(x-x_0)^k$.

Proposition 4.1.1.1 *Soit $\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}$ et $\mathrm{X}^{(1)}$ deux fonctions de puissances Φ-généralisées alors*

$$\int_{x_0}^{x} \left(\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}(x_0,s)\right)^k \Phi(s)ds = \frac{1}{k+1}\left(\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}(x_0,x)\right)^{k+1}$$

et

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\left(\mathrm{X}^{(1)}(x_0,s)\right)^k}{\Phi(s)}ds = \frac{1}{k+1}\left(\mathrm{X}^{(1)}(x_0,x)\right)^{k+1}.$$

Démonstration. Pour $k=0$ nous avons bel et bien que

$$\int_{x_0}^{x} \Phi(s)ds = \widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}(x_0,x).$$

L'équation est donc valide pour $k=0$. Supposons que l'équation est valide pour un k quelconque. Alors pour $k+1$ on trouve par parties que :

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \left(\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}(x_0,s)\right)^{k+1} \Phi(s)\,ds =& \frac{\left(\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}(x_0,x)\right)^{k+2}}{k+1} - \frac{1}{k+1}\int_{x_0}^{x} \Phi(s)\left(\mathrm{X}^{(1)}(x_0,x)\right)^{k+1} ds \\ =& \frac{\left(\mathrm{X}^{(1)}(x_0,x)\right)^{k+2}}{k+2}.\end{aligned}$$

□

Au théorème (4.1.1), nous avons illustré une relation entre les puissances généralisées et leurs Φ-conjuguées. En utilisant cette idée, une autre relation peut être démontrée comme le montre le corollaire suivant.

Corollaire 4.1.1.1 *Pour $n \geq 1$, les fonctions de puissances peuvent s'écrire comme*

$$\begin{aligned}\mathrm{X}^{(n)}(x_0,x) &= n\int_{x_0}^{x} \frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(n-1)}(\xi,x)}{\Phi(\xi)}d\xi, \qquad n \quad \textit{pair} \\ \widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}(x_0,x) &= n\int_{x_0}^{x} \Phi(\xi)\mathrm{X}^{(n-1)}(\xi,x)d\xi, \qquad n \quad \textit{impair.}\end{aligned}$$

Démonstration. En effet, en considérant le premier cas nous avons de la définition, et en inversant les bornes, que

$$\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}(x,x_0) = n\int_{x}^{x_0} \frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(n-1)}(x,\xi)}{\Phi(\xi)}d\xi = n\int_{x_0}^{x} \frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(n-1)}(\xi,x)}{\Phi(\xi)}d\xi.$$

Cependant, lorsque n est pair nous savons que $\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}(x,x_0) = \mathrm{X}^{(n)}(x_0,x)$ du Théorème (4.1.1). De cette façon, on obtient la première égalité. La seconde se prouve de façon similaire. □

Le prochain théorème met en évidence une relation semblable à la relation binomiale pour les puissances standards, mais cette fois avec les fonctions de puissances généralisées.

Théorème 4.1.2 (Théorème binomial) *Soit $\Phi(x)$ une fonction continue non nulle à valeurs complexes définie sur $x \in [a,b]$ et $x_0 \in [a,b]$. Pour un n fini et pair ($n \geq 2$) les fonctions de puissances Φ-généralisées satisfont l'identité suivante :*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \mathrm{X}^{(k)} \widetilde{\mathrm{X}}^{(n-k)} = 0$$

ou de façon équivalente

$$\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \mathrm{X}^{(k)} \widetilde{\mathrm{X}}^{(n-k)}.$$

Démonstration. En intégrant par parties et pour un n pair, nous trouvons

$$\begin{aligned} \mathrm{X}^{(n)}(x_0, x) &= n \int_{x_0}^{x} \mathrm{X}^{(n-1)}(x_0, \xi) \Phi(\xi) d\xi \\ &= n \left[\mathrm{X}^{(n-1)} \widetilde{\mathrm{X}}^{(1)} - (n-1) \int_{x_0}^{x} \widetilde{\mathrm{X}}^{(1)} \mathrm{X}^{(n-1)} \frac{1}{\Phi} d\xi \right]. \end{aligned}$$

En particulier on observe que si $n = 2$ on obtient directement que $\mathrm{X}^{(2)} = 2\mathrm{X}^{(1)}\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)} - \widetilde{\mathrm{X}}^{(2)}$ ce qui prouve l'identité dans ce cas. Pour les cas supérieurs $n \geq 3$ on trouve

$$\int_{x_0}^{x} \widetilde{\mathrm{X}}^{(1)} \mathrm{X}^{(n-2)} \frac{1}{\Phi} d\xi = \frac{1}{2} \widetilde{\mathrm{X}}^{(2)} \mathrm{X}^{(n-2)} - \frac{1}{2}(n-2) \int_{x_0}^{x} \widetilde{\mathrm{X}}^{(2)} \widetilde{\mathrm{X}}^{(n-3)}(\Phi) d\xi$$

tel que

$$\mathrm{X}^{(n)} = n\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)} \mathrm{X}^{(n-1)} - \frac{1}{2} n(n-1) \widetilde{\mathrm{X}}^{(2)} \mathrm{X}^{(n-2)} + \frac{1}{2} n(n-1)(n-2) \int_{x_0}^{x} \widetilde{\mathrm{X}}^{(2)} \mathrm{X}^{(n-3)} \Phi d\xi.$$

En intégrant par parties $n-1$ fois lorsque n est pair on obtient

$$\mathrm{X}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} \widetilde{\mathrm{X}}^{(k)} \mathrm{X}^{(n-k)} - n \int_{x_0}^{x} \widetilde{\mathrm{X}}^{(n-1)} \mathrm{X}^{(0)} \frac{1}{\Phi} d\xi,$$

où, par définition, le dernier terme est $\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}$, ce qui complète la preuve. □

Remarque *On peut considérer la même preuve pour le cas impair. Cependant, une identité triviale est obtenue*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \mathrm{X}^{(x)} \mathrm{X}^{(n-k)} = 0.$$

Remarque *Le théorème 4.1.2 peut être vu, de façon purement symbolique, comme l'expansion binomiale usuelle de telle sorte que*

$$\left(X - \widetilde{X} \right)^{(n)} = 0$$

Les fonctions de puissances généralisées sont liées par un processus d'intégrales itérées. Sous certaines conditions ce processus s'apparente à une multiplication lorsque $n >> 0$. Bien qu'aucune preuve n'ait été obtenue pour le moment, plusieurs simulations numériques confirment que pour plusieurs fonctions Φ, les deux conjectures qui suivent sont valides.

Conjecture 4.1.2.1 *Soit* $\mathrm{X}^{(n)}$ *et* $\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}$ *des fonctions de puissances* Φ*-généralisées. Alors les limites suivantes existent*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{X}^{(2n)}(x_0,x)}{\mathrm{X}^{(2n-1)}(x_0,x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2n+1)}(x_0,x)}{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2n)}(x_0,x)}, \tag{4.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{X}^{(2n+1)}(x_0,x)}{\mathrm{X}^{(2n)}(x_0,x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2n)}(x_0,x)}{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2n-1)}(x_0,x)}. \tag{4.7}$$

Conjecture 4.1.2.2 *Soit* $\mathrm{X}^{(n)}$ *et* $\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}$ *des fonctions de puissances* Φ*-généralisées. Alors les limites suivantes existent*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{X}^{(2n)}(x,x_0) = \Phi(x)(x-x_0)^{2n}, \tag{4.8}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{X}^{(2n+1)}(x,x_0) = \frac{1}{\Phi(x)}(x-x_0)^{2n+1}. \tag{4.9}$$

Définition 4.1.2.1 (Dérivée Φ-généralisée) *Soit* $\Phi(x)$ *une fonction à valeurs complexes non nulle, alors les dérivées* Φ*-généralisées sont définies comme*

$$\mathrm{D}h(x) = \Phi(x)\frac{d}{dx}h(x) \quad \textit{et} \quad \widetilde{\mathrm{D}}h(x) = \frac{1}{\Phi(x)}\frac{d}{dx}h(x),$$

où $h(x)$ *est une fonction complexe quelconque bien définie sur l'intervalle* $[a,b]$*. Les dérivées d'ordres supérieurs sont définies de façon itérative de telle sorte que* $\mathrm{D}^{(0)}(h(x)) \equiv h(x)$*,* $\widetilde{\mathrm{D}}^{(0)}(h(x)) \equiv h(x)$ *et*

$$\mathrm{D}^{(k)}(h(x)) = \mathrm{D}\left(\widetilde{\mathrm{D}}^{(k-1)}(h(x))\right),$$
$$\widetilde{\mathrm{D}}^{(k)}(h(x)) = \widetilde{\mathrm{D}}\left(\mathrm{D}^{(k-1)}(h(x))\right).$$

Ces dérivées reproduisent certaines propriétés importantes que l'on retrouve pour les monômes et pour les dérivées standards.

Proposition 4.1.2.1 *Lorsque* n,$k \in \mathbb{Z}^+$ *sont de mêmes parités et que* $n \geq k$*, nous avons*

$$\mathrm{D}^{(k)}(\mathrm{X}^{(n)}(x_0,x)) = \frac{n!}{(n-k)!}\mathrm{X}^{(n-k)}(x_0,x),$$
$$\widetilde{\mathrm{D}}^{(k)}(\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}(x_0,x)) = \frac{n!}{(n-k)!}\widetilde{\mathrm{X}}^{(n-k)}(x_0,x).$$

D'autre part, lorsque n *et* k *ne sont pas de même parité et que* $n > k$ *alors*

$$\widetilde{\mathrm{D}}^{(k)}(\mathrm{X}^{(n)}(x_0,x)) = \frac{n!}{(n-k)!}\mathrm{X}^{(n-k)}(x_0,x),$$
$$\mathrm{D}^{(k)}(\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}(x_0,x)) = \frac{n!}{(n-k)!}\widetilde{\mathrm{X}}^{(n-k)}(x_0,x).$$

Démonstration. La preuve est aisément effectuée par induction pour la première identité. Les cas pour $n = 0, 1$ sont trivialement vérifiés. Supposons que n est pair et que l'équation est valide pour $0 \leq k \leq n$ et k pair. Alors pour $1 \leq k \leq n+1$ et k impair on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^{(k)}(\mathrm{X}^{(n+1)}) &= D\left(\widetilde{\mathrm{D}}^{(k-1)}(\mathrm{X}^{(n+1)})\right) = \left(\mathrm{D}^{(k-1)}(D\mathrm{X}^{(n+1)})\right) \\ &= \mathrm{D}^{(k-1)}((n+1)\Phi\mathrm{X}^{(n)}\frac{1}{\Phi}) = (n+1)\frac{n!}{(n+1-k)!}\mathrm{X}^{(n-k+1)},\end{aligned}$$

où la seconde égalité est valide lorsque k est pair. Cela prouve la première équation lorsque n est pair. Le cas n impair et k impair se prouve de façon similaire de même que pour les expressions conjuguées. □

Remarque *Il est important de remarquer que les autres combinaisons de Φ-dérivées appliquées aux Φ-puissances ne donnent pas de résultats aussi simples. Par exemple, nous avons que* $\mathrm{D}^{(2)}(\mathrm{X}^{(3)}) = 6\mathrm{X}^{(1)} - 6\left(\frac{1}{\Phi}\right)\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)\mathrm{X}^{(2)}$.

Nous avons rencontré le concept de complétude à la définition 2.0.0.4 et la définition des espaces de Banach 2.0.0.5. Les intégrales itérées présentées en début de ce chapitre nommées fonctions de puissances Φ-généralisées possèdent une propriété de complétude dans l'espace des fonctions $L_2(a, b)$. Il est possible de trouver une série de puissances généralisées équivalentes, au sens de la norme de $L_2(a, b)$, à n'importe quelle fonction faisant partie de l'ensemble de $L_2(a, b)$. Comme nous le verrons, en fonction du choix du point x_0 dans la définition 4.1 la combinaison d'intégrales itérées nécessaires pour atteindre un ensemble complet varie.

Nous commencerons par un exemple simple. Soit l'espace $L_2(0, 1)$. Le théorème de Mũntz [26] indique, entre autres, que l'ensemble $\{1, x^2, x^4, \ldots\}$ et l'ensemble $\{x, x^3, x^5, \ldots\}$ sont tous deux complets dans $L_2(0, 1)$. Or, pour $\Phi \equiv 1$, $a = 0$, $b = 1$ avec $x_0 = 0$ nous avons

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{f\widetilde{\mathrm{X}}^{(2n-2)}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{1, x^2, x^4, \ldots\} \tag{4.10}$$

et

$$\{g_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{f\mathrm{X}^{(2n-1)}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{x, x^3, x^5, \ldots\}. \tag{4.11}$$

Par conséquent, on conclut que, du moins, dans le cas $\Phi \equiv 1$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ sont complets pour $x_0 = 0 = a$ et $b = 1$.

Or, qu'arrive-t-il lorsque Φ n'est plus 1, mais une fonction lisse qui ne s'annule pas sur l'intervalle $[a, b]$. Afin d'étudier cette question, nous aurons besoin du théorème de Lauricella [26] . Ce théorème indique que la propriété de complétude est transitive. Pour cee faire, on peut remarquer que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ sont reliés au problème de Sturm-Liouville. Le théorème 2.0.11 montre que l'ensemble des solutions d'un problème de Sturm-Liouville est complet dans

$L_2(a,b)$. Mais, le problème de Sturm-Liouville

$$u'' + \lambda u = 0,\ 0 < x < 1, \tag{4.12}$$

$$u'(0) = u'(1) = 0. \tag{4.13}$$

donne comme ensemble de solutions $u_n(x) = \cos(n\pi x)$ avec $n = 0, 1, 2, \ldots$. Cet ensemble admet une représentation en séries de Taylor de l'ensemble (4.10). Comme il est possible de créer une série de fonctions de $u_n(x)$ convergeant uniformément aux fonctions de (4.10) et, étant donné le théorème de Lauricella, l'ensemble $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ est complet dans $L_2(0,1)$.

De la même façon, pour le système (4.12), mais avec la condition frontière $u(0) = u(1) = 0$, on arrive alors à l'ensemble composé des fonctions $u_n(x) = \sin(n\pi x)$ avec $n = 1, 2, 3, \ldots$. Pour les mêmes raisons, dans ce cas précis, l'ensemble $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ est également complet dans l'espace $L_2(0,1)$.

En suivant cet exemple on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème 4.1.3 *Soit (a,b) un intervalle fini et $\Phi \in \mathbb{C}^2(a,b) \cap \mathbb{C}^1[a,b]$ une fonction complexe telle que $\Phi(x) \neq 0$ pour tout x dans $[a,b]$. Alors, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ définis précédemment sont tous les deux complets dans $L_2(a,b)$ lorsque $x_0 = a$.*

Démonstration. La preuve s'obtient aisément en considérant le problème de Sturm-Liouville associé à l'ensemble de solutions. Nous avons que $\sqrt{\Phi}$ est une solution de l'equation

$$\sqrt{\Phi}'' + q\sqrt{\Phi} = 0, \tag{4.14}$$

avec le potentiel $q = -\frac{\sqrt{\Phi}''}{\sqrt{\Phi}}$. Considérons l'équation

$$u'' + qu = \lambda u, \tag{4.15}$$

avec les conditions aux frontières

$$u(a) = u(b) = 0.$$

À partir du Théorème 2.0.11 on sait que le système des vecteurs propres du problème (4.15) est complet. Or, ce problème possède des solutions pouvant être exprimées en une expansion uniformément convergente des $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dans le cas où le spectre d'énergie (l'ensemble des λ_n) possède des dégénérescences pour un ensemble de solutions données, ces solutions dégénérées peuvent aussi être obtenues par une série de $\{g_n\}$ [22].

La complétude des $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est obtenue de façon similaire en considérant le problème de Sturm-Liouville pour la condition frontière

$$f'(a)u(a) - f(a)u'(a) = u(b) = 0.$$

□

Lorsque $x_0 \in [a,b]$ un théorème similaire peut être obtenu.

Théorème 4.1.4 *Soit (a,b) un intervalle fini et $\Phi \in \mathbb{C}^2(a,b) \cap \mathbb{C}^1[a,b]$ une fonction complexe telle que $\Phi(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a,b]$. Alors le système de fonctions $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec x_0 un point arbitraire dans l'intervalle $[a,b]$ est complet dans $L_2(a,b)$.*

Démonstration. La preuve se fait de façon similaire en considérant l'équation $u'' + qu = \lambda u$ telle que $q = -\frac{\sqrt{\Phi}''}{\sqrt{\Phi}}$ avec les conditions aux frontières $u(a) = u(b) = 0$. Or cette fois-ci, comme x_0 n'est pas localisé à une frontière, aucun des deux coefficients c_1, c_2 ne s'annule dans la solution générale $u = c_1u_1 + c_2c_2$. Par conséquent, l'ensemble de fonctions représentant u_1 et celui de u_2 sont nécessaires. Or, comme ils sont solutions de l'équation de Sturm-Liouville cet ensemble est complet dans $L_2(a,b)$. □

La remarque suivante permet d'éclaircir les deux preuves précédentes.

Remarque *Soit une problème de Sturm-Liouville tel que la solution générale s'exprime comme $u = c_1u_1 + c_2u_2$. On obtient alors les conditions aux frontières*

$$u_1(x_0) = \sqrt{\Phi(x_0)}, \qquad u_1'(x_0) = \sqrt{\Phi(x_0)}',$$
$$u_2(x_0) = 0, \qquad u_2'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{\Phi(x_0)}}.$$

4.2 Retour sur les intégrales itérées

La première section du présent document présentait une construction en termes de mot et de *Shuffle produit* agissant naturellement avec les intégrales itérées. En effet, la proposition 1.2.0.1 montre que le *Shuffle produit* agit d'une façon élégante avec les mots composés de 1-formes. La présente section vise à mettre de l'avant l'utilité de cette façon de symboliser l'intégrale itérée dans l'étude des fonctions de puissances Φ-généralisées.

Pour ce faire nous utiliserons deux 1-formes que nous noterons u et d faisant référence à « *up* » et « *down* » respectivement de façon à mettre en évidence que

$$u = \Phi(t)dt \qquad \text{et} \qquad d = \frac{1}{\Phi(t)}dt. \tag{4.16}$$

En se réferant à la section 1.3, nous avons que $A = \{u, d\}$ et que le monoïde A^* est donné par toutes les séquences de lettres de A, de telle sorte que

$$A^* = \{1, u, d, ud, du, uu, dd, udu, \ldots\}$$

où 1 dénote l'identité, i.e. $1 \cdot u = u \cdot 1 = u$ et de même pour d. Le *Shuffle produit* est défini de la même façon, nous obtenons donc les équations suivantes :

$$\int_{x_0}^{x} (ud)^n = \frac{1}{(2n)!}\mathrm{X}^{(2n)}(x_0, x), \qquad \int_{x_0}^{x} d \cdot (ud)^n = \frac{1}{(2n+1)!}\mathrm{X}^{(2n+1)}(x_0, x),$$
$$\int_{x_0}^{x} (du)^n = \frac{1}{(2n)!}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2n)}(x_0, x), \qquad \int_{x_0}^{x} u \cdot (du)^n = \frac{1}{(2n+1)!}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2n+1)}(x_0, x).$$

Comme les fonctions de puissances Φ-généralisées demandent d'intégrer les mots de A^*, nous définirons un opérateur S tel que

$$S_{x_0}^{x}(ud) = \int_{x_0}^{x} ud.$$

On peut déterminer la valeur de $S_{x_0}^{x}(1)$ de la façon suivante. En utilisant la proposition 1.2.0.1 nous obtenons

$$S_{x_0}^{x}(1 \sqcup\!\sqcup\, u) = S_{x_0}^{x}(1)S_{x_0}^{x}(u) = S_{x_0}^{x}(u).$$

Par conséquent, $S_{x_0}^{x}(1)$ représente l'identité multiplicative. Il y a donc une application injective des mots sur A vers les puissances généralisées. Plusieurs mots de A^* ne représentent pas des puissances généralisées. Par exemple, udd n'est pas une puissance généralisée une fois intégrée. Il est cependant possible de simplifier certains mots en puissances généralisées. Par exemple,

$$S_{x_0}^{x}(u^n) = S_{x_0}^{x}\left(\frac{u^{\sqcup\!\sqcup n}}{n!}\right) = \frac{\left(\mathrm{X}^{(1)}\right)^n}{n!}, \tag{4.17}$$

et, de la même façon

$$S_{x_0}^{x}(d^n) = S_{x_0}^{x}\left(\frac{d^{\sqcup\!\sqcup n}}{n!}\right) = \frac{\left(\mathrm{X}^{(1)}\right)^n}{n!}.$$

L'intégrale S possède les deux propriétés suivantes. L'intégrale transforme le *Shuffle* en multiplication de telle sorte que

$$S\left(a \sqcup\!\sqcup\, b\right) = S(a)S(b), \qquad a, b \in A^*, \tag{4.18}$$

où les bornes ont été omises. L'intégrale par parties peut s'écrire facilement avec cette notation, ainsi on trouve

$$S(a)S(b) = S\left(S(a)b + S(b)a\right), \qquad a, b \in A^*. \tag{4.19}$$

Un antihomomorphisme d'anneau qui joue un rôle important dans la théorie des polynômes généralisés est l'inversion de mots que l'on notera ici par l'opérateur O, défini de la façon suivante :

$$O(a_n a_{n-1} \cdots a_1) = \prod_{j=0}^{n} a_j, \qquad a_i \in A. \tag{4.20}$$

O est un antihomomorphisme puisqu'il préserve l'addition, l'identité, la linéarité et la multiplication inverse l'ordre d'apparition des éléments. En effet on trouve

$$O(a \cdot b) = O(b) \cdot O(a), \qquad a, b \in A^*.$$

Il agit naturellement avec l'opérateur d'intégration S de telle sorte que

$$O\left(S_{x_0}^x(a_1 \cdot a_2)\right) = S_{x_0}^x(a_2 a_1), \qquad a_i \in A,$$

il commute donc avec cet opérateur $O\left(S(a)\right) = S\left(O(a)\right)$. De plus O est une involution, i.e. $O\left(O(a)\right) = a$. Par conséquent, selon la définition d'antihomorphisme du Chapitre 1, il implique un homomorphisme naturel $Sh_Q[A] \to Sh_Q[A]$ tellque

$$O\left(a \sqcup\!\sqcup\, b\right) = O(a) \sqcup\!\sqcup\, O(b), \qquad a, b \in A^*.$$

Cet opérateur permet de changer naturellement de parité dans les fonctions de puissances généralisées. En effet, on trouve aisément que $O\left(\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}\right) = \mathrm{X}^{(n)}$ et que $O\left(\mathrm{X}^{(n)}\right) = \widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}$. De façon générale, l'application de l'opérateur O sur une propriété des puissances généralisées permet d'obtenir une autre propriété reliée par l'involution. Un autre homomorphisme d'intérêt est la commutation des lettres u et d. Cet opérateur sera noté Q et a pour effet d'inverser u et d. Soit $\widetilde{A}$ le sous-ensemble de A^* contenant tous les mots reliés à des fonctions de puissances généralisées :

$$\widetilde{A} = \{1, u, d, ud, du, dud, udu, dudu, udud, \ldots\}.$$

Sur l'ensemble $\widetilde{A}$, l'opérateur O et l'opérateur Q possèdent le même effet $O(a) = Q(a)$ si $a \in \widetilde{A}$.

La définition 1.21 présentée au Chapitre 1 de la fonction exponentielle par *shuffle* produit peut être utilisée avec l'alphabet $A = \{u, d\}$. Pour ce faire nous étudierons le morphisme d'anneau $\mathbf{X}$ défini comme suit :

$$\mathbf{X}(u) = x_u, \qquad \mathbf{X}(d) = x_d, \qquad x_u, x_d \in Q.$$

Il est donc possible de représenter chacun de ces morphismes par un vecteur dans Q^2. Par exemple, nous écrirons $\mathbf{X} = (x_u, x_d)$. Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{G}((x_u, x_d)) &= \sum_{w \in A} w\mathbf{X}(w) \\ &= 1 + ux_u + dx_d + uux_u^2 + ddx_d^2 + (ud + du)x_u x_d + uuux_u^3 + \cdots.\end{aligned}$$

Les deux cas suivants se calculent facilement :

$$\mathbf{G}((x_u, 0)) = \sum_{n=0}^{\infty} (u)^n x_u^n.$$

Par conséquent, en utilisant (4.18),

$$\begin{aligned} S_{x_0}^x\left(\mathbf{G}((x_u,0))\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_u^n S_{x_0}^x\left(u^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_u^n}{n!}\left(\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}(x_0,x)\right)^n \\ &= \exp\left(x_u\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}(x_0,x)\right). \end{aligned}$$

De façon similaire, on trouve $S_{x_0}^x\left(\mathbf{G}((0,x_d))\right) = \exp\left(x_d\mathrm{X}^{(1)}(x_0,x).\right)$. Ces deux résultats n'ont rien de surprenant, mais permettent de déterminer la valeur de la construction plus générale $\mathbf{G}((x_u,x_d))$, conséquence du théorème 1.3.1. On trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{G}((x_u,x_d)) &= \mathbf{G}((x_u,0)) \sqcup\!\sqcup \mathbf{G}((0,x_d)), \\ S_{x_0}^x\left(\mathbf{G}((x_u,x_d))\right) &= S_{x_0}^x\left(\mathbf{G}((x_u,0))\right) S_{x_0}^x\left(\mathbf{G}((0,x_d))\right), \\ &= \exp\left(x_u\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}(x_0,x) + x_d\mathrm{X}^{(1)}(x_0,x)\right). \end{aligned}$$

Cette expression peut se réécrire, selon la définition du théorème 1.3.2, comme $S_{x_0}^x\left(\mathbf{G}((x_u,x_d))\right) = \mathbf{G}_{x_0}^x((x_u,x_d))$. On obtient donc

$$\mathbf{G}_{x_0}^x(\mathbf{X}) = \mathbf{G}_z^x(\mathbf{X})\mathbf{G}_{x_0}^z(\mathbf{X}), \qquad x_0 < z < x.$$

Le théorème 1.3.3 engendre, de façon similaire,

$$\mathbf{H}_{x_0}^x((x_u,x_d)) = \exp\left(-x_u\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}(x_0,x) - x_d\mathrm{X}^{(1)}(x_0,x)\right),$$

étant donné que $\mathbf{G}_{x_0}^x(\mathbf{X}) \sqcup\!\sqcup \mathbf{H}_{x_0}^x(\mathbf{X}) = 1$. Les deux polynômes d'intérêt dans le présent mémoire possèdent une alternance des 1-formes ud ou du dans leur construction. Nous nous sommes brièvement intéressés aux polynômes sans alternance composées des 1-formes u ou d. On peut se demander s'il y a une relation pour d'autres formes d'alternance et les fonctions de puissances généralisées. Le théorème 1.4.1 illustre une façon d'obtenir une relation avec des alternances du type $uudd$ et $dduu$ en posant $a = u$ et $b = d$. On trouve

$$\begin{aligned} S_{x_0}^x\left(\sum_{r=-n}^{n}(-1)^r\left[(ud)^{n-r} \sqcup\!\sqcup (ud)^{n+r}\right]\right) &= S_{x_0}^x\left(4^n(u^2d^2)^n\right), \\ \sum_{r=-n}^{n}(-1)^r S_{x_0}^x\left((ud)^{n-r}\right) S_{x_0}^x\left((ud)^{n+r}\right) &= 4^n S_{x_0}^x\left((u^2d^2)^n\right), \\ \sum_{r=-n}^{n}(-1)^r\frac{\mathrm{X}^{(2(n-r))}\mathrm{X}^{(2(n+r))}}{(2(n-r))!(2(n+r))!} &= \frac{4^n}{4n!}\mathrm{XX}^{(4n)}(x_0,x), \end{aligned}$$

où $\mathrm{XX}^{(4n)}$ est le polynôme avec une alternance $uudd$. Par exemple, pour $n = 1$ on obtient

$$\mathrm{XX}^{(4n)}(x_0,x) = 4!\int_{x_0}^{x}\Phi(t_4)\int_{x_0}^{t_4}\frac{1}{\Phi(t_3)}\int_{x_0}^{t_3}\Phi(t_2)\int_{x_0}^{t_2}\frac{1}{\Phi(t_1)}dt_1dt_2dt_3dt_4.$$

Cette relation n'est pas invariante sous l'application de l'opérateur O et Q. L'opérateur O et Q génèrent la relation avec les puissances généralisées conjuguées. D'autres relations existent, par exemple

$$\sum_{r=-n}^{n} (-1)^r \left[(ud)^{n-r} \sqcup\!\sqcup (du)^{n+r}\right] = \frac{4^n}{2} \left(w + Q(w)\right),$$

où $w = d \cdot (u^2d^2)^{n-1} \cdot u^2d$. Une fois intégrée, cette relation peut s'écrire

$$\sum_{r=-n}^{n} (-1)^r \mathrm{X}^{(n-r)} \widetilde{\mathrm{X}}^{(n+r)} = \frac{4^n}{2} S\left(w + Q(w)\right).$$

La relation précédente est invariante sous l'application de O, Q ainsi que P. Finalement, plusieurs équations peuvent être générées à partir de l'algèbre des mots sur l'alphabet $\{u, d\}$. Des exemples d'équations potentiellement intéressantes sont donnés. Il est possible qu'une forme plus générale existe pour chacune de ces équations.

Exemple 4.2.0.1 *Il est possible de créer une somme sur des shuffles de deux lettres afin de générer* $\widetilde{\mathrm{X}}^{(4)}$ *et* $\mathrm{X}^{(4)}$*. L'une des solutions possibles est la suivante :*

$$2dd \sqcup\!\sqcup uu + 1ud \sqcup\!\sqcup ud - d \sqcup\!\sqcup uud - d \sqcup\!\sqcup duu - 2u \sqcup\!\sqcup ddu = udud + dudu.$$

Il est cependant impossible de trouver une solution pour l'une des deux puissances udud ou dudu lorsque prise seule avec les shuffles de mots de longueur deux et un, telqu'illustré dans le cas précédent. D'un autre côté, il est possible de générer tous les mots de longueur 4 *dans* A^* *par la somme suivante :*

$$\sum_{w \in A_4^*} w = dd \sqcup\!\sqcup uu + \frac{1}{3} du \sqcup\!\sqcup uu + \frac{1}{6} uu \sqcup\!\sqcup uu + \frac{1}{6} dd \sqcup\!\sqcup dd + \frac{1}{3} ud \sqcup\!\sqcup uu + \frac{1}{3} du \sqcup\!\sqcup dd + \frac{1}{3} ud \sqcup\!\sqcup dd.$$

Finalement la relation suivante existe et est différente au théorème binomial généralisé. En termes d'équation sur les mots, on trouve

$$-4dd \sqcup\!\sqcup uu + 2du \sqcup\!\sqcup ud + du \sqcup\!\sqcup du + ud \sqcup\!\sqcup ud = 0. \tag{4.21}$$

En termes de puissances généralisées, la relation peut se réécrire comme

$$\frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2)}\mathrm{X}^{(2)}}{2} + \frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2)}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2)}}{4} + \frac{\mathrm{X}^{(2)}\mathrm{X}^{(2)}}{4} - \left(\mathrm{X}^{(1)}\right)^2 \left(\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}\right)^2 = 0.$$

4.3 La trigonométrie Φ-généralisée

Une question d'intérêt que nous n'avons pas encore abordée dans le présent travail est la possibilité de définir, à l'aide du théorème binomial généralisé, des fonctions analogues aux fonctions trigonométriques standards. La définition suivante est inspirée des séries de Taylor des fonctions trigonométriques.

Définition 4.3.0.1 *Soit un ensemble de fonctions de puissances généralisées, alors les fonctions trigonométriques généralisées sont définies par*

$$\mathcal{C}\left(x_0,x\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j)!}\mathrm{X}^{(2j)}(x_0,x),\qquad \widetilde{\mathcal{C}}\left(x_0,x\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j)!}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2j)}(x_0,x),\quad (4.22)$$

$$\mathcal{S}\left(x_0,x\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\mathrm{X}^{(2j+1)}(x_0,x),\qquad \widetilde{\mathcal{S}}\left(x_0,x\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2j+1)}(x_0,x).\quad (4.23)$$

Par extension aux fonctions de puissances Φ-généralisées nous appellerons ces fonctions les fonctions Φ-trigonométriques.

Ces séries sont convergentes conséquence du fait que

$$\frac{\mathrm{X}^{(2j)}(x_0,x)}{(2j)!}=\int_{x_0}^{x}\Phi(\xi_1)\int_{x_0}^{\xi_1}\frac{1}{\Phi(\xi_2)}\int_{x_0}^{\xi_2}\Phi(\xi_3)\int_{x_0}^{\xi_3}\cdots\int_{x_0}^{\xi_{2j-1}}\frac{1}{\phi(\xi_{2j})}d\xi_{2j}\cdots d\xi_1$$

et

$$\frac{\mathrm{X}^{(2j+1)}(x_0,x)}{(2j+1)!}=\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\Phi(\xi_1)}\int_{x_0}^{\xi_1}\Phi(\xi_2)\int_{x_0}^{\xi_2}\frac{1}{\Phi(\xi_3)}\int_{x_0}^{\xi_3}\cdots\int_{x_0}^{\xi_{2j}}\frac{1}{\phi(\xi_{2j+1})}d\xi_{2j+1}\cdots d\xi_1.$$

Or, nous avons

$$\left|\mathrm{X}^{(2j)}(x_0,x)\right|\leq\left(\max|\Phi(x)|\right)^j\left(\max\left|\frac{1}{\Phi(x)}\right|\right)^j|b-a|^{2j}=c^j$$

et

$$\left|\mathrm{X}^{(2j+1)}(x_0,x)\right|\leq\leq\left(\max|\Phi(x)|\right)^j\left(\max\left|\frac{1}{\Phi(x)}\right|\right)^{j+1}|b-a|^{2j+1}=|b-a|\left(\max\left|\frac{1}{\Phi(x)}\right|\right)c^j.$$

Par conséquent, la série $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{c^j}{(2j)!}<\infty$ et $|b-a|\left(\frac{1}{\Phi(x)}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{c^j}{(2j+1)!}<\infty$ de sorte que les fonctions Φ-trigonométriques $\mathcal{C}\left(x_0,x\right)$ et $\mathcal{S}\left(x_0,x\right)$ converge uniformément en vertu du M-test de Weierstrass. La convergence des fonctions Φ-conjuguées $\widetilde{\mathcal{C}}\left(x_0,x\right)$ et $\widetilde{\mathcal{S}}\left(x_0,x\right)$ est démontrée de façon similaire.

Il est important de constater que chacune de ces fonctions généralisées représente les fonctions trigonométriques habituelles lorsque $\Phi\equiv 1$. Dans ce cas particulier nous avons que $\mathcal{C}\left(x_0,x\right)=\widetilde{\mathcal{C}}\left(x_0,x\right)=\cos(x-x_0)$ et $\mathcal{S}\left(x_0,x\right)=\widetilde{\mathcal{S}}\left(x_0,x\right)=\sin(x-x_0)$. Une identité remarquable des fonctions trigonométriques est évidemment l'identité pythagoricienne $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$. Nous obtenons ici une forme généralisée assez remarquable.

Théorème 4.3.1 *Les fonctions Φ-trigonométriques $\mathcal{C}\left(x_0,x\right)$, $\widetilde{\mathcal{C}}\left(x_0,x\right)$, $\mathcal{S}\left(x_0,x\right)$ et $\widetilde{\mathcal{S}}\left(x_0,x\right)$ satisfont à l'identité pythagoricienne*

$$\mathcal{C}\left(x_0,x\right)\widetilde{\mathcal{C}}\left(x_0,x\right)+\mathcal{S}\left(x_0,x\right)\widetilde{\mathcal{S}}\left(x_0,x\right)=1.\qquad (4.24)$$

Démonstration. De la propriété des sommes doubles infinies suivante

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{k_j} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{p} c_{q,p-q}, \tag{4.25}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
C\widetilde{C} &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+k}}{(2j)!(2k)!}\mathrm{X}^{(2j)}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2k)} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{p} \frac{(-1)^{p}}{(2q)!(2p-2q)!}\mathrm{X}^{(2p-2q)}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2q)} \\
&= 1 + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{p+1} \frac{(-1)^{p+1}}{(2q)!(2p+2-2q)!}\mathrm{X}^{(2q+2-2q)}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2q)} \\
&= 1 + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{p} \left[\frac{(-1)^{p+1}}{(2q)!(2p+2-2q)!}\mathrm{X}^{(2p+2-2q)}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2q)} + \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+2)!}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2p+2)}\right].
\end{aligned}$$

En utilisant encore une seconde fois la proprieté (4.25) pour $S\widetilde{S}$, on obtient

$$S\widetilde{S} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{p} \frac{(-1)^{p}}{(2q+1)!(2p+1-2q)!}\mathrm{X}^{(2p+1-2q)}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2q+1)}$$

tel que

$$\begin{aligned}
S\widetilde{S} + C\widetilde{C} &= 1 + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{p} \left[\frac{(-1)^{p+1}}{(2q)!(2p+2-2q)!}\mathrm{X}^{(2p+2-2q)}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2q)} + \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+2)!}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2p+2)}\right. \\
&\quad \left. + \frac{(-1)^{p}}{(2q+1)!(2p+1-2q)!}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2p+1-2q)}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2q+1)}\right] \\
&= 1 + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+2)!}\sum_{q=0}^{p} \left[\frac{(2p+2)!}{(2q)!(2p+2-2q)!}\mathrm{X}^{(2p+2-2q)}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2q)} + \widetilde{\mathrm{X}}^{(2p+2)}\right. \\
&\quad \left. - \frac{(2p+2)!}{(2q+1)!\,((2p+2)-(2q+1))!}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2p+1-2q)}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2q+1)}\right] \\
&= 1 + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+2)!}\sum_{q=0}^{2p+2} (-1)^{q}\binom{2p+2}{q}\mathrm{X}^{(2p+2-q)}\widetilde{\mathrm{X}}^{(q)}.
\end{aligned}$$

Cependant, comme $2p+2$ est pair et plus grand ou égal à 2, la dernière sommation sur q est toujours nulle en vertu du théorème 4.1.2 et cela complète la preuve. □

Afin de donner une idée au lecteur sur la nature de ces fonctions trigonométriques généralisées, un exemple pour le cas $\Phi(x) \equiv (1+\alpha x)^2$ est donné. De plus, plusieurs exemples graphiques de ces fonctions sont présentés.

Exemple 4.3.1.1 *Pour $\Phi(x) = (1+\alpha x)^2$ les fonctions Φ-trigonométriques sont données par*

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\,(x_0,x) &= \frac{\sqrt{\Phi(x)}\cos(x-x_0) - \alpha\sin(x-x_0)}{\sqrt{\Phi(x_0)}},\\
\widetilde{\mathcal{C}}\,(x_0,x) &= \frac{\cos(x-x_0) + \alpha x_0\cos(x-x_0) + \alpha\sin(x-x_0)}{\sqrt{\Phi(x)}},\\
\mathcal{S}\,(x_0,x) &= \frac{\sin(x-x_0)}{\sqrt{\Phi(x)}\sqrt{\Phi(x_0)}},\\
\widetilde{\mathcal{S}}\,(x_0,x) &= -\alpha^2(x-x_0)\cos(x-x_0) + \big(1+\alpha(x+x_0)+\alpha^2(1+xx_0)\big)\sin(x-x_0).
\end{aligned}$$

Remarque *Il est possible de définir des fonctions Φ-hyperboliques de la même façon. Dans ce cas, l'identité pythagoricienne se construit de façon similaire.*

De par leur construction, les fonctions Φ-trigonométriques agissent de façon similaire aux fonctions trigonométriques standard sous l'application des dérivées généralisées. La proposition suivante éclaircit cette propriété.

Proposition 4.3.1.1 *Les dérivées généralisées agissent de la façon suivante sur les fonctions trigonométriques Φ-généralisées*

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}C(x_0,x) &= -S(x_0,x), \qquad & \widetilde{D}\widetilde{S}(x_0,x) &= \widetilde{C}(x_0,x),\\
D\widetilde{C}(x_0,x) &= -\widetilde{S}(x_0,x), \qquad & DS(x_0,x) &= C(x_0,x).
\end{aligned}$$

Remarque *Les fonctions trigonométriques généralisées respectent les équations différentielles suivantes*

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{(2)}(C) &= -C, \qquad & \mathrm{D}^{(2)}(\widetilde{S}) &= -\widetilde{S},\\
\widetilde{\mathrm{D}}^{(2)}(\widetilde{C}) &= -\widetilde{C}, \qquad & \widetilde{\mathrm{D}}^{(2)}(S) &= -S.
\end{aligned}$$

On montre facilement que $S(x_0,x)$ est une solution de l'équation

$$u + \frac{\Phi'}{\Phi}u' + u'' = 0.$$

Il est souvent plus facile de résoudre cette équation que de déterminer par séries la forme des fonctions trigonométriques généralisées. Il est aussi possible de mettre cette équation sous la forme d'une équation de Sturm-Liouville telle que

$$(\Phi u')' + \Phi u = 0$$

où S est une solution.

Si l'on suppose que $\Phi > 0$ sur $[a,b]$ il est possible d'inférer le comportement oscillatoire de $S(x_0,x)$. Ce phénomène à été largement étudié, voir par exemple l'article de Kong sur

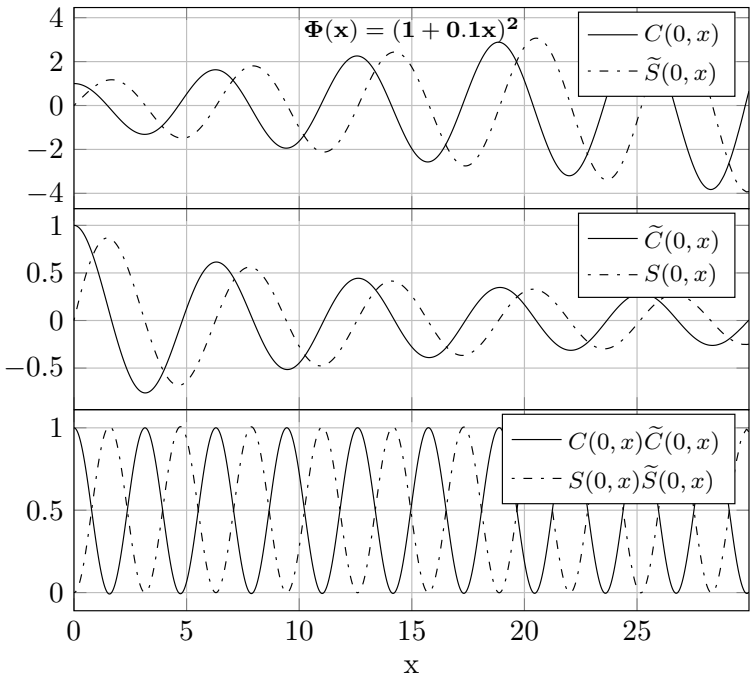

FIGURE 4.1 – Fonctions Φ-trigonométriques pour le cas $\Phi \equiv (1 + 0.1x)^2$. Ce cas particulier peut être vu comme une perturbation du cas standard $\Phi \equiv 1$. On constate que les fonctions agissent initialement comme les fonctions trigonométriques standards avant d'être affectées par un amortissement important.

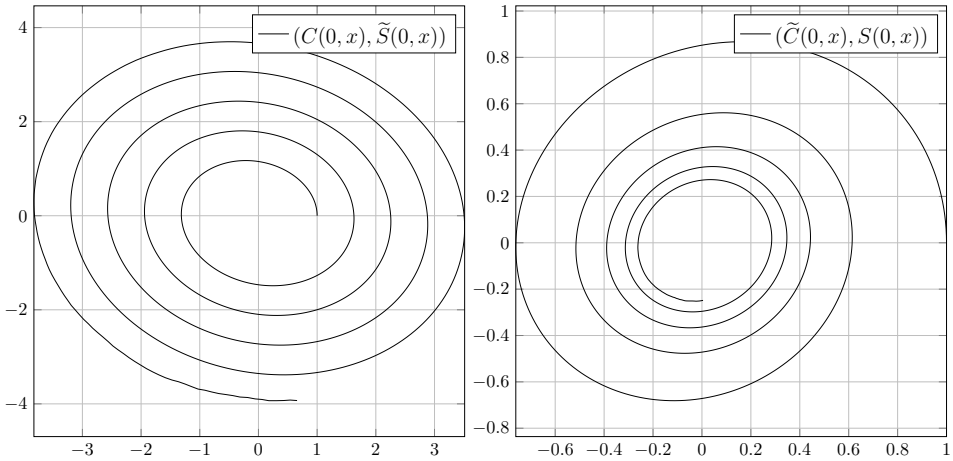

FIGURE 4.2 – Espace de phases des fonctions Φ-trigonométriques pour $\Phi \equiv (1 + 0.1x)^2$.

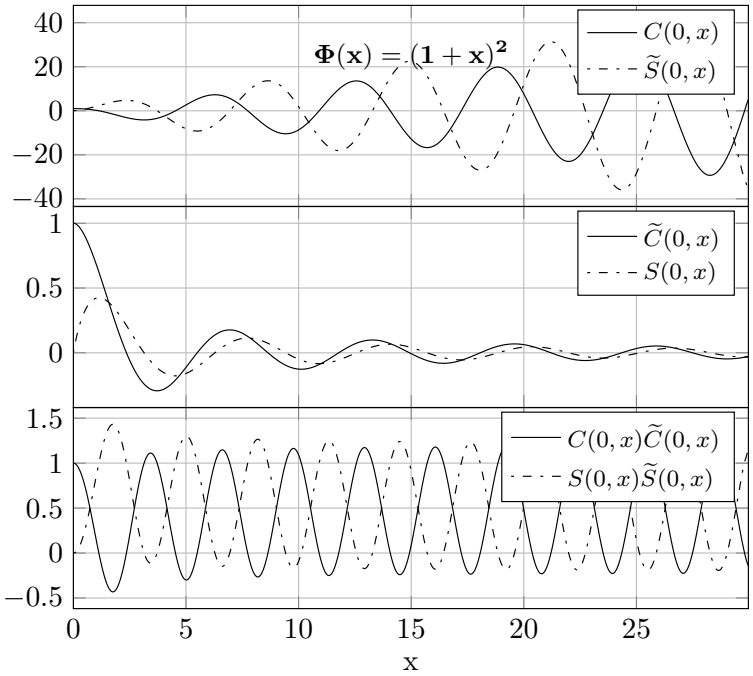

FIGURE 4.3 – Fonctions Φ-trigonométriques pour le cas $\Phi \equiv (1+x)^2$. Ce cas particulier montre une perturbation de plus grande amplitude.

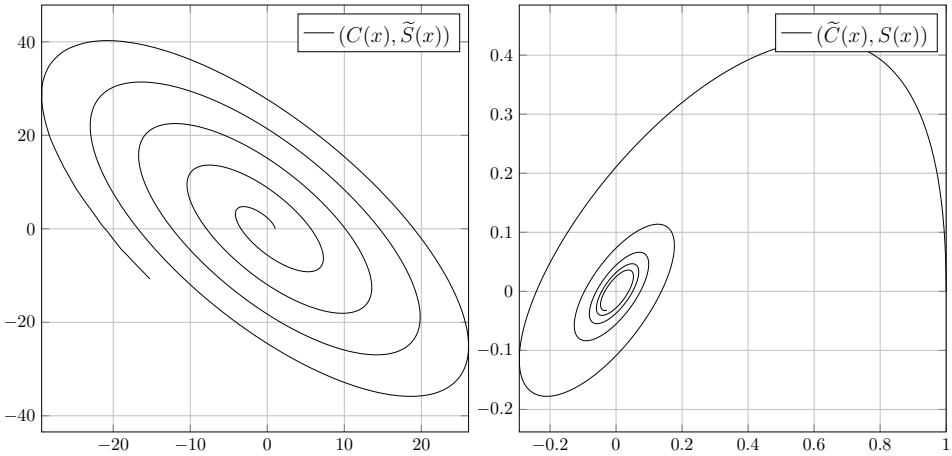

FIGURE 4.4 – Espace de phases des fonctions Φ-trigonométriques pour $\Phi \equiv (1+x)^2$.

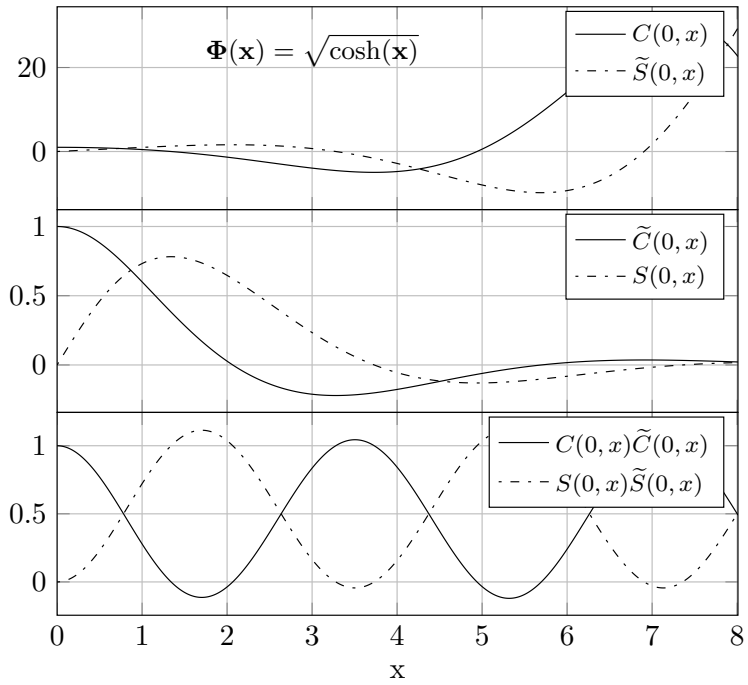

FIGURE 4.5 – Fonctions Φ-trigonométriques pour le cas $\Phi \equiv \sqrt{\cosh(x)}$. Ce cas particulier montre une large perturbation.

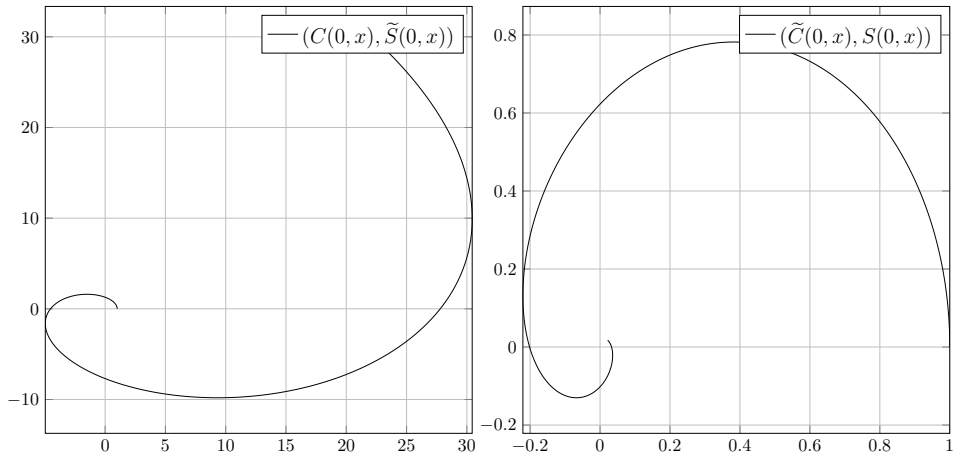

FIGURE 4.6 – Espace de phases des fonctions Φ-trigonométriques associées pour $\Phi \equiv \sqrt{\cosh(x)}$. L'aspect oscillatoire est préservé, mais l'amortissement est grand et la période de rotation est fortement augmentée.

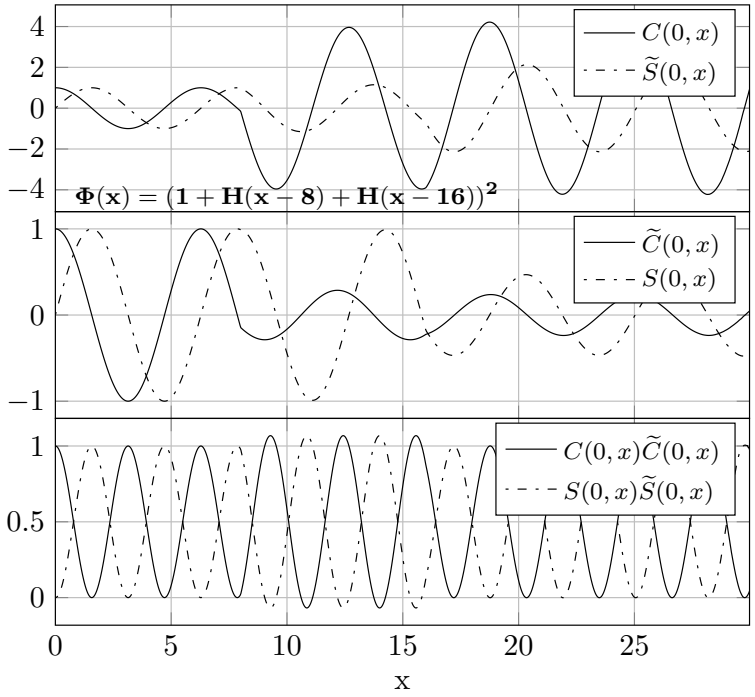

FIGURE 4.7 – Fonctions Φ-trigonométriques dans le cas où l'on a une fonction de Heaviside qui effectue un saut à $x = 8$ et à $x = 16$. L'aspect sinusoïdal est préservé, mais un changement de phase et d'amplitude est présent à chaque saut de la fonction.

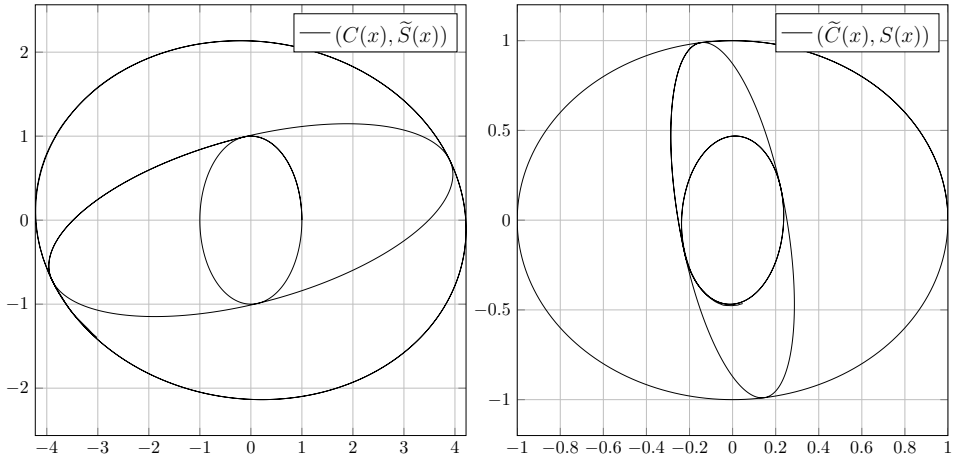

FIGURE 4.8 – Espace de phases des fonctions Φ-trigonométriques associées pour pour une fonction de Heaviside qui effectue un saut à $x = 8$ et à $x = 16$.

les critères d'oscillation des solutions d'équations différentielles ordinaires de deuxième ordre ordinaire. Un critère suffisant et simple d'oscillation pour S indique que si

$$\lim_{x\to\infty} \widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}(x_0, x) = \infty, \tag{4.26}$$

alors S est oscillatoire. Une preuve de cette assertion peut aussi être trouvée dans l'article de Fite [8].

De plus, grâce à un théorème de Wintner [33], S est oscillatoire si la moyenne $\mathrm{moy}(\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)})$ est infinie lorsque l'intervalle tend vers l'infini i.e.

$$\mathrm{moy}(\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{x_0}^{t} \widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}(x_0, s) ds = \infty.$$

De plus, si l'on considère $\Phi(x)$ comme une densité alors si la valeur moyenne de l'observable x sur l'intervalle $[x_0, x]$ est infinie, S est oscillatoire [19] i.e.

$$\lim_{t\in\infty} \int_{x_0}^{t} sq(s) ds = \infty.$$

Une large proportion des fonctions $\Phi(x)$ possède la propriété que $\frac{\Phi(x)'}{\Phi(x)}$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini. Comme la fonction $\Phi(x)$ doit être non nulle toutes les fonctions telles que $\Phi(x)'$ tend vers 0 lorsque x est grand font partie de cette classe. Cela est le cas pour, par exemple, toute fonction $\Phi(x)$ de forme polynomiale. Dans ce cas, l'équation devient $u'' + u = 0$ et possède comme solution $u(x_0, x) = A\sin(x) + B\cos(x)$.

Chapitre 5

Les séries de Taylor Φ-généralisées

Dans cette section nous supposerons que $\Phi(x)$ est une fonction à valeur réelle définie sur $[a, b]$. Nous étudierons la possibilité de représenter une fonction réelle quelconque à l'aide des fonctions de puissances Φ-généralisées. Nous avons vu qu'il était possible de le faire dans le cas où la fonction était solution de l'équation de Sturm-Liouville. De plus, cette question a déjà été considérée dans l'article de Kravchenkov, Morelos et Tremblay [15] pour les intégrales itérées $\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}$ et $\mathrm{X}^{(n)}$ de l'équation de Sturm-Liouville. Ici, le problème est considéré dans un contexte plus général et est présenté dans une forme plus simple.

Les prochaines sections font usage du Wronskien d'un ensemble de fonctions. Il est donc pertinent de définir une notation simplifiée pour celui-ci. Soit un ensemble de fonctions $\{f_1(x), \cdots, f_n(x)\}$ de classes C^n, alors le Wronskien $\mathcal{W}$ sera écrit comme

$$\mathcal{W}[f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)] := \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Il sera aussi nécessaire de définir des polynômes alternés $\mathcal{Y}_n(x_0, x)$ et $\widetilde{\mathcal{Y}}_n(x_0, x)$ afin de simplifier la notation telle que $\forall n \geq 0$

$$\mathcal{Y}_n(x_0, x) = \begin{cases} \widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}(x_0, x) & \text{n impair,} \\ \mathrm{X}^{(n)}(x_0, x) & \text{n pair,} \end{cases}$$

et

$$\widetilde{\mathcal{Y}}_n(x_0, x) = \begin{cases} \mathrm{X}^{(n)}(x_0, x) & \text{n impair,} \\ \widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}(x_0, x) & \text{n pair.} \end{cases}$$

Le Wronskien des fonctions $\widetilde{\mathcal{Y}}_n(x_0, x)$ et $\mathcal{Y}_n(x_0, x)$ sera particulièrement utile dans ce qui suit. Par conséquent, nous utiliserons une notation spécifique pour ces deux Wronskien :

$$\mathcal{W}_n(x) = \mathcal{W}\left[\mathcal{Y}_0(x_0, x), \mathcal{Y}_1(x_0, x), \ldots, \mathcal{Y}_n(x_0, x)\right],$$

et

$$\widetilde{\mathcal{W}}_n(x) = \mathcal{W}\left[\widetilde{\mathcal{Y}}_0(x_0, x), \widetilde{\mathcal{Y}}_1(x_0, x), \ldots, \widetilde{\mathcal{Y}}_n(x_0, x)\right].$$

La définition de complétude (2.0.0.4) indique qu'un espace métrique complet est un espace dans lequel toute suite de Cauchy converge dans le même espace. Il est possible de se demander si l'ensemble des combinaisons linaires de vecteurs d'un ensemble E est complet dans un espace. Cela aura pour conséquence de permettre de représenter tout vecteur de l'espace par une combinaison linéaire de vecteurs. Les prochaines propositions permettront de répondre à cette question pour les fonctions de l'espace $L^2(a, b)$.

Proposition 5.0.0.1 *Soit x_0 un point arbitraire coïncidant avec a ou b dans l'intervalle $[a, b]$. Alors l'espace généré par l'ensemble $E = \left\{\mathrm{X}^{(2k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ est complet sous la norme de $L^2(a, b)$. Selon les mêmes conditions, l'ensemble $E = \left\{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ est aussi garanti de converger dans $L^2(a, b)$.*

Démonstration. Afin de démontrer la complétude du système $\left\{\mathrm{X}^{(2k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, il est préférable de prouver la complétude de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ et de $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, où

$$f_n = \sqrt{\Phi}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2n)} \quad \text{et} \quad g_n = \sqrt{\Phi}\mathrm{X}^{(2n+1)}.$$

Cela a été fait au chapitre précédent au Théorème 4.1.3. Ainsi, il suffit de montrer que $\sqrt{\Phi}$ peut être supprimée. Cela est possible conséquence du fait que Φ est non nulle par définition sur l'intervalle (a, b). □

Finalement, nous obtenons la proposition suivante qui, bien qu'évidente, est intéressante pour le présent propos.

Proposition 5.0.0.2 *Soit $x_0 \in [a, b]$ un point arbitraire alors l'espace généré par $\{\mathcal{Y}_n(x_0, x)\}$ et celui généré par $\left\{\widetilde{\mathcal{Y}}_n(x_0, x)\right\}$ sont complet dans $L^2(a, b)$.*

Démonstration. Cette proposition découle directement de la proposition précédente. □

Cette proposition laisse présager la possibilité d'écrire en termes de séries de Taylor généralisées étant donné la complétude du système. Dans un premier temps, il est nécessaire de montrer l'indépendance linéaire des n premières fonctions $\widetilde{\mathcal{Y}}$ et $\mathcal{Y}$. L'indépendance linéaire de ces fonctions implique que chacune des fonctions apporte une nouvelle information, absente dans les fonctions qui précèdent.

Proposition 5.0.0.3 *Soit x_0 un point dans l'intervalle (a,b) et les deux ensembles de fonctions $S_n = \{\mathcal{Y}_0(x_0,x),\ldots,\mathcal{Y}_n(x_0,x)\}$ et $\widetilde{S}_n = \left\{\widetilde{\mathcal{Y}}_0(x_0,x),\ldots,\widetilde{\mathcal{Y}}_n(x_0,x)\right\}$ de classe $C^n(a,b)$. Alors les ensembles de fonctions S_n et $\widetilde{S}_n$ sont linéairement indépendant pour toute fonction Φ.*

Démonstration. Pour ce faire il est possible d'évaluer le Wronskien à n'importe quel point du domaine $x \in [a,b]$. Il est plus aisé d'effectuer le calcul pour $x = x_0$, i.e. calculer les éléments de la matrice $\left[\mathcal{Y}_j^{(i)}(x_0,x_0)\right]_{i,j}$ pour $0 \leq i,j \leq n$. De façon évidente $\mathcal{Y}_j(^{)}(i)(x_0,x_0 = \delta_{i,0}$, où $\delta_{i,j}$ est le delta de Kronecker. Comme la première ligne de la matrice est connue, considérons la partie strictement supérieure à la diagonale constituée de $\mathcal{Y}_k^{(i)}(x_0,x)$ avec $1 \leq j < k \leq n$. Les dérivées de ces fonctions peuvent être écrites comme une sommation des fonctions $\mathcal{Y}_r(x_0,x)$ et $\widetilde{\mathcal{Y}}_r(x_0.x)$ pour $1 \leq r \leq k-1$. Par conséquent, lorsque $x = x_0$ on trouve, pour chacun des termes que $\mathcal{Y}_r(x_0,x_0) = 0 = \widetilde{\mathcal{Y}}_r(x_0,x_0)$ et le Wronskien devient une matrice triangulaire inférieure. Par un calcul similaire, on trouve que la matrice $\left[\widetilde{\mathcal{Y}}_j^{(i)}(x_0,x_0)\right]_{i,j}$ de l'ensemble de fonctions $\widetilde{S}_n$ à $x = x_0$ est aussi triangulaire inférieure.

Sur la diagonale de la matrice du Wronskien on obtient

$$\mathcal{Y}_m^{(m)}(x_0,x_0) = \begin{cases} m!\Phi(x_0), & m \text{ impair}, \\ m!, & m \text{ pair}, \end{cases} \tag{5.1}$$

et

$$\widetilde{\mathcal{Y}}_m^{(m)}(x_0,x_0) = \begin{cases} \frac{m!}{\Phi(x_0)}, & m \text{ impair}, \\ m!, & m \text{ pair}, \end{cases} \tag{5.2}$$

pour $0 \leq m \leq n$. Cela peut se prouver par induction sur n. Les deux équations (5.1) et (5.2) sont valides pour $m = 0$. Pour un n pair et plus grand que zéro, supposons que (5.1) et (5.2) sont valide pour $0 \leq m \leq n-1$. On trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_n^{(n)} &= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\mathcal{Y}_n' \\ &= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(n\Phi\widetilde{\mathcal{Y}}_{n-1}\right) \\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\Phi^{n-1-k}\widetilde{\mathcal{Y}}_{n-1}^k. \end{aligned}$$

Or, tel que montré ci-dessus, les termes $\widetilde{\mathcal{Y}}_{n-1}^{(k)}$ évalués à $x = x_0$ sont égaux à zéro pour $k = 0,\ldots,n-2$. Ainsi, on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_n^{(n)}(x_0,x_0) &= n\Phi(x_0)\widetilde{\mathcal{Y}}_{n-1}^{(n-1)}(x_0,x_0) \\ &= n\Phi(x_0)(n-1)\frac{1}{\Phi(x_0)} \\ &= n!. \end{aligned}$$

Le cas n impair plus grand que 1 peut être montré de façon similaire. L'équation (5.2) est aussi prouvée par induction de façon similaire. Par conséquent, comme nous avons affaire à une matrice triangulaire, le déterminant est donné par le produit des éléments diagonaux. Ainsi, le Wronskien à $x = x_0$ est donné par

$$\mathcal{W}_n(x_0) = \prod_{k=0}^{n} \mathcal{Y}_k^{(k)}(x_0, x_0) = \begin{cases} \alpha_n \left(\sqrt{\Phi(x_0)}\right)^{n+1} & n \text{ impair}, \\ \alpha_n \left(\sqrt{\Phi(x_0)}\right)^{n} & n \text{ pair}, \end{cases}$$

et

$$\widetilde{\mathcal{W}}_n(x_0) = \begin{cases} \alpha_n \left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(x_0)}}\right)^{n+1} & n \text{ impair}, \\ \alpha_n \left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(x_0)}}\right)^{n} & n \text{ pair}. \end{cases}$$

où α_n est défini par

$$\alpha_n := \prod_{k=0}^{n} k!.$$

Comme l'ensemble de $n+1$ fonctions de S_n ($\widetilde{S}_n$) sont différentiables n fois sur l'intervalle (a, b) avec $W_n(x_0) \neq 0$ ($\widetilde{W}_n(x_0) \neq 0$) pour $x \in (a, b)$, alors les fonctions de S_n ($\widetilde{S}_n$) sont linéairement indépendantes conséquence de l'identité de Abel. □

Proposition 5.0.0.4 *Soit x_0 un point de l'intervalle (a, b) de Φ. Alors l'ensemble de solutions de l'équation différentielle ordinaire $D^{n+1}y(x) = 0$ d'ordre $n + 1$ est donné par*

$$y(x) = \begin{cases} S_n = \{\mathcal{Y}_0(x_0, x), \ldots, \mathcal{Y}_n(x_0, x)\}, & n \textit{ impair}, \\ \widetilde{S}_n = \left\{\widetilde{\mathcal{Y}}_0(x_0, x), \ldots, \widetilde{\mathcal{Y}}_n(x_0, x)\right\}, & n \textit{ pair}. \end{cases}$$

De plus, l'ensemble solutions pour l'équation différentielle ordinaire $\widetilde{D}^{n+1}u(x) = 0$ d'ordre $n + 1$ est donné par

$$y(x) = \begin{cases} \widetilde{S}_n = \left\{\widetilde{\mathcal{Y}}_0(x_0, x), \ldots, \widetilde{\mathcal{Y}}_n(x_0, x)\right\}, & n \textit{ impair}, \\ S_n = \{\mathcal{Y}_0(x_0, x), \ldots, \mathcal{Y}_n(x_0, x)\}, & n \textit{ pair}. \end{cases}$$

Démonstration. Considérons le cas n impair. Pour $0 \leq k \leq n$ on obtient

$$D^{n+1}\mathcal{Y}_k = \begin{cases} D^{(n+1-k)}\left(\widetilde{D}^{(k)}\widetilde{X}^{(k)}\right) = D^{(n+1-k)}k! = 0, & k \text{ impair}, \\ D^{(n+1-k)}\left(D^{(k)}X^{(k)}\right) = D^{(n+1-k)}k! = 0, & k \text{ pair}. \end{cases}$$

De façon similaire, $\widetilde{D}^{(n+1)}\widetilde{\mathcal{Y}}_k = 0$ lorsque n est impair et $0 \leq k \leq n$. Pour n pair et $0 \leq k \leq n$ on trouve

$$D^{n+1}\widetilde{\mathcal{Y}}_k = \begin{cases} D^{(n+1-k)}\left(D^{(k)}X^{(k)}\right) = D^{(n+1-k)}k! = 0, & k \text{ impair}, \\ D^{(n+1-k)}\left(\widetilde{D}^{(k)}\widetilde{X}^{(k)}\right) = D^{(n+1-k)}k! = 0, & k \text{ pair}. \end{cases}$$

De la même façon nous avons $\widetilde{D}^{(n+1)}\mathcal{Y}_k = 0$ lorsque n est pair et $0 \leq k \leq n$. □

Pour démontrer la proposition 5.0.0.3 il était suffisant de montrer que $\mathcal{W}_n(x_0) \neq 0$ et $\widetilde{\mathcal{W}}_n(x_0) \neq 0$. Cependant, il sera nécessaire de déterminer la forme générale du Wronskien $\mathcal{W}_n(x)$ et $\widetilde{\mathcal{W}}_n(x)$ pour tout x dans l'intervalle $[a, b]$. Pour ce faire, nous aurons besoin de l'identité de Abel pouvant être énoncée de la façon suivante :

Proposition 5.0.0.5 *Soit l'équation différentielle ordinaire homogène d'ordre $n \geq 1$*

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots p_(x)y' + p_0(x)y = 0 \tag{5.3}$$

sur un intervalle $I = (a, b)$ avec des fonctions p réelles ou complexes. Alors l'identité de Abel généralisée indique que le Wronskien $\mathcal{W}(y_1, \cdots, y_n)$ de n solutions réelles ou complexes de l'équation différentielle satisfait la relation suivante :

$$\mathcal{W}(y_1, \cdots, y_n)(x) = \mathcal{W}(y_1, \cdots, y_n)(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(\xi)d\xi\right), \qquad \forall x_0 \in I.$$

De la Proposition 5.0.0.4, l'ensemble $S_n = \{\mathcal{Y}_0(x_0, x), \ldots, \mathcal{Y}_n(x_0, x)\}$ est un ensemble solutions pour $D^{n+1}y(x) = 0$ pour n impairs et $\widetilde{D}^{(n+1)}y(x) = 0$ pour n pairs. En développant ces équations en termes des dérivées usuelles, on obtient

$$D^{n+1}y(x) = a_{n+1}(x)y^{n+1}(x) + a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) = 0 \tag{5.4}$$

et

$$\widetilde{D}^{n+1}y(x) = \widetilde{a}_{n+1}(x)y^{n+1}(x) + \widetilde{a}_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + \widetilde{a}_1(x)y'(x) = 0 \tag{5.5}$$

avec les coefficients

$$\begin{aligned} a_{n+1}(x) &= 1, & a_n(x) &= -\frac{n+1}{1}\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}, & &n \text{ impair}, \\ \widetilde{a}_{n+1}(x) &= \frac{1}{\Phi(x)}, & \widetilde{a}_n(x) &= -\frac{n}{2}\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)^2}, & &n \text{ pair}. \end{aligned}$$

L'identité de Abel nous permet d'écrire $\mathcal{W}_n(x) = \mathcal{W}_n(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{a_n(\xi)}{a_{n+1}(\xi)}d\xi\right)$. On obtient ainsi

$$\mathcal{W}_n(x) = \begin{cases} \alpha_n \left(\sqrt{\Phi(x)}\right)^{n+1} & n \text{ impair}, \\ \alpha_n \left(\sqrt{\Phi(x)}\right)^{n} & n \text{ pair}. \end{cases} \tag{5.6}$$

Par un calcul similaire pour $\widetilde{S}_n = \left\{\widetilde{\mathcal{Y}}_0(x_0, x), \ldots, \widetilde{\mathcal{Y}}_n(x_0, x)\right\}$, un ensemble de solutions de l'équation différentielle ordinaire $D^{(n+1)}y(x) = 0$ avec n pair et $\widetilde{D}^{(n+1)}y(x) = 0$ avec n impair, on trouve alors que les coefficients de l'équation différentielle (5.5) sont donnés par

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_{n+1}(x) &= 1, & \widetilde{a}_n(x) &= \frac{n+1}{2}\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}, & &n \text{ impair}, \\ a_{n+1}(x) &= \Phi(x), & a_n(x) &= \frac{n}{2}\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)^2}, & &n \text{ pair}, \end{aligned}$$

tel que

$$\widetilde{\mathcal{W}}_n(x) = \begin{cases} \alpha_n \left(\dfrac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} \right)^{n+1} & \text{n impair,} \\ \alpha_n \left(\dfrac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} \right)^{n} & \text{n pair.} \end{cases} \tag{5.7}$$

La fonction $\widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}(x_0, x)$ (resp. $\mathrm{X}^{(n)}(x_0, x)$) est la fonction dite de Cauchy [9] utilisée pour obtenir une solution particulière de l'équation non homogène $D^{(n+1)}y(x) = h(x)$ (resp. $\widetilde{D}^{(n+1)}y(x) = h(x)$). Les solutions particulières $y_p(x)$ sont alors données respectivement par

$$y_p(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} \widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}(\xi, x) \frac{h(\xi)}{\Phi(\xi)} d\xi, \qquad \text{pour} \quad D^{(n+1)}y(x) = h(x),$$

et

$$y_p(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} \mathrm{X}^{(n)}(\xi, x) h(\xi) \Phi(\xi) d\xi, \qquad \text{pour} \quad \widetilde{D}^{(n+1)}y(x) = h(x).$$

Conséquence du fait que

$$\begin{aligned} D^{(n+1)}y_p(x) = D\widetilde{D}^{(n)}y_p(x) &= D\left[\frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} \left(\widetilde{D}^{(n)} \widetilde{\mathrm{X}}^{(n)}(\xi, x) \right) \frac{h(\xi)}{\Phi(\xi)} d\xi \right] \\ &= D \int_{x_0}^{x} \frac{h(\xi)}{\Phi(\xi)} d\xi = h(x). \end{aligned}$$

Un calcul similaire peut être fait pour le cas $\widetilde{D}^{(n+1)}y(x) = h(x)$.

Le théorème suivant indique comment utiliser les fonctions généralisées pour construire des fonctions arbitraires.

Théorème 5.0.1 (Φ-séries de Taylor généralisées) *Soit $f(x), \mathcal{Y}_0(x), \mathcal{Y}_1(x), \ldots, \mathcal{Y}_n(x)$ des fonctions à valeurs réelles de classe C^{n+1} dans l'intervalle $[a, b]$ et $a \leq x_0 \leq b$, où les fonctions $\mathcal{Y}_n(x)$ sont des fonctions Φ-généralisées tel que défini à l'équation (5.1) et à l'équation (5.2). Alors, la fonction $f(x)$ peut s'écrire de la façon suivante :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathcal{D}_k f(x_0)}{k!} \mathcal{Y}_k(x_0, x) + R_n(x), \tag{5.8}$$

où

$$\mathcal{D}_k f(x) = \begin{cases} \widetilde{D}^{(k)} f(x), & k \text{ impair,} \\ D^{(k)} f(x), & k \text{ pair,} \end{cases}$$

et

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} [\Phi(\xi)]^{(-1)^n} \mathcal{Y}_n(\xi, x) \mathcal{D}_{n+1} f(\xi) d\xi.$$

Démonstration. De la Proposition 5.0.0.3 sur l'indépendance linéaire de S_n et de $\widetilde{S}_n$ le Wronskien est positif et non nul ($\mathcal{W}_n(x) > 0$) dans l'intervalle $[a, b]$. En considérant les résultats obtenus dans Widder [31] [32], on trouve

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k f(x_0) g_k(x_0, x) + R_n(x), \tag{5.9}$$

où la fonction $g_k(x_0, x)$ sont définies telles que $g_0(x_0, x) = 1$ et

$$g_k(x_0, x) = \left(\frac{1}{\mathcal{W}_k(x_0)}\right) \begin{vmatrix} 1 & \mathcal{Y}_1(x_0, x_0) & \cdots & \mathcal{Y}_k(x_0, x_0) \\ 0 & \mathcal{Y}_1^{(1)}(x_0, x_0) & \cdots & \mathcal{Y}_k^{(1)}(x_0, x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathcal{Y}_1^{(k-1)}(x_0, x_0) & \cdots & \mathcal{Y}_k^{(k-1)}(x_0, x_0) \\ 1 & \mathcal{Y}_1(x_0, x) & \cdots & \mathcal{Y}_k(x_0, x) \end{vmatrix},$$

alors que les opérateurs L_k sont définis tels que L_0 est l'identité et

$$L_k f(x) = \frac{\mathcal{W}\left[\mathcal{Y}_0(x_0.x), \mathcal{Y}_1(x_0, x), \ldots, \mathcal{Y}_{k-1}(x_0, x), f(x)\right]}{\mathcal{W}_{k-1}(x)}.$$

Cependant, les fonctions g_k et les opérateurs L_k de Widder sont définis en termes de déterminant pouvant s'exprimer d'une façon plus simple en termes des fonctions $\phi_k(x)$ définies par

$$\phi_0(x) = 1, \qquad \phi_1(x) = \Phi(x),$$

et

$$\phi_i(x) = \frac{\mathcal{W}_i(x)\mathcal{W}_{i-2}(x)}{\left[\mathcal{W}_{i-1}(x)\right]^2}, \qquad 2 \leq i \leq n-1.$$

En effet, de [31] on a que

$$g_k(x_0, x) = \frac{\phi_0(x)}{\phi_0(x) \cdots \phi_k(x_0)} \int_{x_0}^{x} \phi_1(\xi_1) \int_{x_0}^{\xi_1} \cdots \int_{x_0}^{\xi_{k-2}} \int_{x_0}^{\xi_{k-1}} \phi_k(\xi_k) d\xi_k \cdots d\xi_2 d\xi_1,$$

et

$$L_k f(x) = \phi_0(x)\phi_1(x) \ldots \phi_{k-1}(x) \frac{d}{dx} \frac{1}{\phi_{k-1}(x)} \frac{d}{dx} \frac{1}{\phi_{k-2}(x)} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} \frac{1}{\phi_1(x)} \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{\phi_0(x)}.$$

Dans notre cas, les fonctions $\phi_i(x)$ sont calculées à partir de l'équation (5.6). On obtient $\phi_0(x) = 1$ et $\phi_k(x) = k\left(\frac{1}{\Phi(x)}\right)^{(-1)^k}$. Il est maintenant facile d'identifier les fonctions $g_k(x_0, x)$ et l'opérateur L_k tel que

$$g_k(x_0, x) = \begin{cases} \frac{1}{k!} \frac{1}{\Phi(x_0)} \widetilde{\mathrm{X}}^{(k)}(x_0, x), & k \text{ impair}, \\ \frac{1}{k!} \mathrm{X}^{(k)}(x_0, x), & k \text{ pair}, \end{cases} \tag{5.10}$$

et

$$L_k f(x) = \begin{cases} \Phi(x)\widetilde{D}^{(k)} f(x), & k \text{ impair}, \\ D^{(k)} f(x), & k \text{ pair}, \end{cases} \tag{5.11}$$

pour $k \geq 0$. Le reste est obtenu en utilisant la théorie de Widder [31] et en constatant que $R_n(x)$ est de la forme

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} g_n(\xi, x) L_{n+1} f(\xi) d\xi,$$

ce qui est équivalent à

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} [\Phi(\xi)]^{(-1)^n} \mathcal{Y}_n(\xi, x) \mathcal{D}_{n+1} f(\xi) d\xi.$$

□

La preuve du Théorème 5.0.1 donne la possibilité d'obtenir une formule pour les coefficients $a_k(x)$, $\widetilde{a}_k(x)$ pour le développement des dérivées généralisées $D^{(n)}y(x)$ et $\widetilde{D}^{(n)}y(x)$ en termes des dérivés usuelles, c'est-à-dire

$$D^{(n)} f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) f^{(k)}(x) \qquad \text{et} \qquad \widetilde{D}^{(n)} f(x) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_k(x) f^{(k)}(x).$$

En effet, grâce à l'équation (5.11) et sa version Φ-conjuguée on trouve

$$D^{(n)} f(x) = \begin{cases} \Phi(x)\widetilde{L}_n f(x), & n \text{ impair}, \\ L_n f(x), & n \text{ pair}, \end{cases}$$

et

$$\widetilde{D}^{(n)} f(x) = \begin{cases} \Phi(x) L_n f(x), & n \text{ impair}, \\ \widetilde{L}_n f(x), & n \text{ pair}. \end{cases}$$

En considérant le cas $n > 0$ tel que n est pair on trouve, par exemple,

$$
\begin{aligned}
D^{(n)}f(x) &= \frac{1}{\mathcal{W}_{n-1}(x)} \begin{vmatrix} \mathcal{Y}_0 & \mathcal{Y}_1 & \cdots & \mathcal{Y}_{n-1} & f \\ \mathcal{Y}_0' & \mathcal{Y}_1' & \cdots & \mathcal{Y}_{n-1}' & f' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{Y}_0^{(n)} & \mathcal{Y}_1^{(n)} & \cdots & \mathcal{Y}_{n-1}^{(n)} & f^{(n)} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\alpha_{n-1}\left[\Phi(x)\right]^{\frac{n}{2}}} \begin{vmatrix} \mathcal{Y}_1' & \mathcal{Y}_2' & \cdots & \mathcal{Y}_{n-1}' & f' \\ \mathcal{Y}_1'' & \mathcal{Y}_2'' & \cdots & \mathcal{Y}_{n-1}'' & f'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{Y}_1^{(n)} & \mathcal{Y}_2^{(n)} & \cdots & \mathcal{Y}_{n-1}^{(n)} & f^{(n)} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\alpha_{n-1}\left[\Phi(x)\right]^{\frac{n}{2}}} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_{i_1,\ldots,i_{n-1},k} \begin{vmatrix} \mathcal{Y}_1^{i_1} & \mathcal{Y}_2^{i_1} & \cdots & \mathcal{Y}_{n-1}^{i_1} \\ \mathcal{Y}_1^{i_2} & \mathcal{Y}_2^{i_2} & \cdots & \mathcal{Y}_{n-1}^{i_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{Y}_1^{i_{n-1}} & \mathcal{Y}_2^{i_{n-1}} & \cdots & \mathcal{Y}_{n-1}^{i_{n-1}} \end{vmatrix} f^{(k)}(x),
\end{aligned}
$$

où $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots i_{n-1} \leq n$ et $\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1} k}$ représente le symbole de Levi-Civita à n dimensions. Par un calcul similaire pour n impair, on obtient le prochain résultat pour les coefficients $a_k(x)$ (les coefficients $\widetilde{a}_k(x)$ sont obtenus par Φ-conjugaisons).

Proposition 5.0.1.1 *Les dérivées Φ-généralisées $D^{(n)}f(x)$ et $\widetilde{D}^{(n)}f(x)$ d'ordre n peuvent être écrites en termes des dérivées usuelles*

$$
D^{(n)}f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) f^{(k)}(x) \quad \textit{et} \quad \widetilde{D}^{(n)}f(x) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_k(x) f^{(k)}(x),
$$

avec

$$
a_k(x) = \begin{cases} \epsilon_{i_1,\ldots,i_{n-1},k} \dfrac{\left[\Phi(x)\right]^{\frac{n+1}{2}}}{\alpha_{n-1}} \begin{vmatrix} \widetilde{\mathcal{Y}}_1^{(i_1)} & \widetilde{\mathcal{Y}}_2^{(i_1)} & \cdots & \widetilde{\mathcal{Y}}_{n-1}^{(i_1)} \\ \widetilde{\mathcal{Y}}_1^{(i_2)} & \widetilde{\mathcal{Y}}_2^{(i_2)} & \cdots & \widetilde{\mathcal{Y}}_{n-1}^{(i_2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{\mathcal{Y}}_1^{(i_{n-1})} & \widetilde{\mathcal{Y}}_2^{(i_{n-1})} & \cdots & \widetilde{\mathcal{Y}}_{n-1}^{(i_{n-1})} \end{vmatrix}, & k \textit{ impair,} \\ \epsilon_{i_1,\ldots,i_{n-1},k} \dfrac{1}{\alpha_{n-1}\left[\Phi(x)\right]^{\frac{n}{2}}} \begin{vmatrix} \mathcal{Y}_1^{(i_1)} & \mathcal{Y}_2^{(i_1)} & \cdots & \mathcal{Y}_{n-1}^{(i_1)} \\ \mathcal{Y}_1^{(i_2)} & \mathcal{Y}_2^{(i_2)} & \cdots & \mathcal{Y}_{n-1}^{(i_2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{Y}_1^{(i_{n-1})} & \mathcal{Y}_2^{(i_{n-1})} & \cdots & \mathcal{Y}_{n-1}^{(i_{n-1})} \end{vmatrix}, & k \textit{ pair.} \end{cases}
$$

et

$$\widetilde{a}_k(x) = \begin{cases} \epsilon_{i_1,\ldots,i_{n-1},k} \dfrac{1}{\alpha_{n-1}[\Phi(x)]^{\frac{n+1}{2}}} \begin{vmatrix} \mathcal{Y}_1^{(i_1)} & \mathcal{Y}_2^{(i_1)} & \cdots & \mathcal{Y}_{n-1}^{(i_1)} \\ \mathcal{Y}_1^{(i_2)} & \mathcal{Y}_2^{(i_2)} & \cdots & \mathcal{Y}_{n-1}^{(i_2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{Y}_1^{(i_{n-1})} & \mathcal{Y}_2^{(i_{n-1})} & \cdots & \mathcal{Y}_{n-1}^{(i_{n-1})} \end{vmatrix}, & k \text{ impair,} \\ \epsilon_{i_1,\ldots,i_{n-1},k} \dfrac{[\Phi(x)]^{\frac{n}{2}}}{\alpha_{n-1}} \begin{vmatrix} \widetilde{\mathcal{Y}}_1^{(i_1)} & \widetilde{\mathcal{Y}}_2^{(i_1)} & \cdots & \widetilde{\mathcal{Y}}_{n-1}^{(i_1)} \\ \widetilde{\mathcal{Y}}_1^{(i_2)} & \widetilde{\mathcal{Y}}_2^{(i_2)} & \cdots & \widetilde{\mathcal{Y}}_{n-1}^{(i_2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{\mathcal{Y}}_1^{(i_{n-1})} & \widetilde{\mathcal{Y}}_2^{(i_{n-1})} & \cdots & \widetilde{\mathcal{Y}}_{n-1}^{(i_{n-1})} \end{vmatrix}, & k \text{ pair} \end{cases}$$

où $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1} \leq n$ *et* $1 \leq k \leq n$.

Chapitre 6

La composition de Volterra des fonctions de puissances généralisées

Les monômes standards x^n avec la multiplication standard permettent la construction de l'anneau des polynômes. La multiplication y est alors associative, commutative et possède un élément neutre. Il est d'intérêt de construire une opération binaire similaire pour les fonctions de puissances Φ-généralisées. Cette tâche n'est toutefois pas aisée lorsque $\Phi(x)$ n'est pas constant. En s'inspirant de la multiplication matricielle, il est cependant possible d'en arriver à une opération intéressante qui va s'avérer utile pour l'étude de l'équation de Schrödinger.

Considérons une matrice $M = [m_{ij}]\,,\ i, j \in 1, 2, \ldots g$ de telle sorte que

$$[m_{ij}] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1g} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2g} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{g1} & m_{g2} & \cdots & m_{gg} \end{bmatrix}$$

et une matrice similaire $[n_{ij}]\,,\ i, j \in 1, 2, \ldots, g$ de telle sorte que

$$[n_{ij}] = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1g} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2g} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{g1} & n_{g2} & \cdots & n_{gg} \end{bmatrix}.$$

Alors on peut définir l'opération $\cdot$ entre deux matrices $[m]$ et $[n]$ de telle sorte que

$$[m] \cdot [n] = [p_{ij}] = \sum_{h=1}^{g} m_{ih} n_{hj}$$

qui n'est rien d'autre que le produit matriciel usuel. Nous appellerons ce produit la composition finie du second type [29]. Cette opération possède la propriété d'être associative, mais

n'est pas commutative en général. Lorsque la composition entre deux matrices $[m]$ et $[n]$ est commutative, nous dirons que ces deux matrices sont permutables entre elles.

Une autre composition d'intérêt, mais un peu connue, est celle que Volterra nomma la composition finie du premier type. Elle se définit comme suit

$$[p_{ij}] = \sum_{h=i+1}^{j-1} m_{ih} n_{hj}.$$

Les deux compositions sont reliées si l'on considère que pour la matrice $[m]$ nous avons que

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & i \geq j \\ m_{ij}, & i < j. \end{cases}$$

Alors les deux compositions sont équivalentes de telle sorte que

$$\sum_{h=1}^{g} m_{ih} n_{hj} = \sum_{h=1+i}^{j-1} m_{ih} n_{hj}.$$

La composition du premier type est, elle aussi, associative et n'est pas commutative. Par exemple, les seules matrices commutant avec l'unité ($n_{ij} \forall i, j$) sont les matrices de la forme

$$m_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{g-1} \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{g-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{g-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

C'est-à-dire toute matrice de la forme $m_{ij} = m_{j-i}$, soit toutes les matrices qui ne dépendent que de la différence des indices. On peut se demander s'il est possible, par un processus de limites, de considérer des fonctions à deux variables plutôt que des matrices $[m]$ et $[n]$, et ainsi générer une opération binaire de façon similaire. Pour ce faire, il est possible d'utiliser un processus analogue à la définition de l'intégrale de Riemann. Dans un premier temps, rappelons la définition de l'intégrale de Riemann.

Soit une fonction $f(x)$ avec un nombre fini de discontinuités définit sur un intervalle $[a, b]$. Nous divisons l'intervalle en n parties $h_1, h_2, h_3 \ldots h_n$. Pour chacun des sous intervalle, il est possible de prendre une valeur f_i de $f(x)$ entre la limite supérieure et la limite inférieure de $f(x)$ sur h_i. Ainsi, la somme $\sum_{i=1}^{n} f_i h_i$ est bien définie. Maintenant supposons que l'on permette aux h_i de devenir infiniment petits. Alors, la limite suivante est unique et ne dépend pas de la façon de sélectionner les f_i à l'intérieur des subdivisions h_i

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f_i h_i = \int_a^b f(x) dx_i.$$

D'une façon analogue, plutôt que d'étudier une fonction continue d'une seule variable, on peut considérer une fonction à deux variables $f(x, y)$ vers une représentation discrète sous forme de matrice f_{ij}. De cette façon, on peut écrire nos compositions en termes de fonctions en faisant le chemin inverse. Si m_{ij} est relié à la fonction $f(x, y)$ et n_{ij} à la fonction $\phi(x, y)$, alors la composition de deuxième type devient

$$\sum_{k=1}^{n} m_{ik} n_{kj} \to \int_a^b f(x, \xi)\phi(\xi, y)d\xi.$$

La composition du premier type devient

$$\sum_{h=i+1}^{j-1} m_{ih} n_{hj} \to \int_x^y f(x, \xi)\phi(\xi, y)d\xi.$$

Les conditions de permutabilité deviennent alors, pour le deuxième type

$$\int_a^b f(x, \xi)\phi(\xi, y)d\xi = \int_a^b \phi(x, \xi)f(\xi, y)d\xi$$

et pour le second type,

$$\int_x^y f(x, \xi)\phi(\xi, y)d\xi = \int_x^y \phi(x, \xi)f(\xi, y)d\xi.$$

L'associativité est toujours respectée. La permutabilité est une propriété qui est préservée par les deux types de composition pour les fonctions que nous dirons permutables entre elles. L'addition et la soustraction de fonctions permutables entre elles engendrent des fonctions permutables entre elles. Pour reprendre l'exemple précédent, les fonctions qui sont permutables avec l'unité $\phi(x, y) = 1$ ont la forme

$$f(x, y) = f(y - x).$$

De plus, toutes les fonctions de ce type sont permutables les unes avec les autres [28]. La composition du premier type sera d'un intérêt particulier dans ce chapitre étant donné sa relation avec les fonctions de puissances Φ-généralisées. D'une façon générale, nous noterons la composition généralisée du premier type par le symbole $\star$ de telle sorte que

$$f \star g = \int_x^y f(x, \xi)g(\xi, y)d\xi.$$

La composition effectuée plusieurs fois à partir de la même fonction f sera notée à l'aide d'un exposant entre crochets afin d'éviter toute ambiguïté. L'exposant zéro sera utilisé symboliquement pour indiquer l'identité (id) de sorte que $f^{\langle 0 \rangle} = \mathrm{Id} = g^{\langle 0 \rangle}$. Nous aurons donc, de façon itérative que

$$f^{\langle 0 \rangle} = \mathrm{id}, \qquad f^{\langle 1 \rangle} = f$$
$$f^{\langle 2 \rangle} = f \star f, \qquad f^{\langle 3 \rangle} = f \star f^{\langle 2 \rangle}, \ldots$$

La composition de la fonction f par une constante a sera notée simplement af lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sinon l'exposant sera utilisé $af^{\langle 1\rangle}$. Pour un ensemble de fonctions permutables entre elles $\{f_i\}$ l'addition et la multiplication agissent de façon complètement analogue à l'algèbre des polynômes. Les monômes sont alors de la forme $f_{i_1}^{\langle j_1\rangle}\dots f_{i_k}^{\langle j_k\rangle}$.

Dans le cas où les fonctions sont non permutables, il est toujours possible de respecter l'ordre d'apparition de telle sorte que lorsque f ne permute pas avec g on trouve

$$(a+f)(b+g) = ab + ag + bf + f\star g.$$

Dans ce cas on se retrouve avec une algèbre non commutative. La proposition suivante démontre l'intérêt d'utiliser des fonctions qui permutent entre elles.

Proposition 6.0.0.1 (Volterra) *Soit un polynôme obtenu par composition de fonctions $f_1, f_2, \dots$ permutables, alors le polynôme est une fonction qui est elle-même permutable avec les fonctions $f_1, f_2, \dots$. De plus, la composition des polynômes obtenus de ces fonctions sera permutable et l'algèbre ainsi obtenue sera parfaitement analogue à l'algèbre des polynômes.*

6.1 Application aux polynômes généralisés

Cette proposition sera particulièrement utile pour l'étude des séries de puissances de fonctions permutables. Pour ce faire, nous étudierons la série géométrique

$$z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + \cdots,$$

qui converge dans le cercle $|z| < 1$. On peut générer une autre série telle que

$$S = f^{\langle 1\rangle} + f^{\langle 2\rangle} + f^{\langle 3\rangle} + \cdots + f^{\langle n\rangle} + \cdots.$$

S converge tant que f est borné, de telle sorte que $|f(x,y)| \leq M$. Par conséquent,

$$\left|f^{\langle n\rangle}(x,y)\right| \leq \frac{M^n\,|y-x|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

La série S est uniformément convergente. Cette propriété est en fait généralisable et tient pour toute série de puissances comme le montre le théorème qui suit.

Théorème 6.1.1 *Soit $a_{i\in\mathbb{N}}$ une séquence de nombres réels ou complexes et la série suivante*

$$S(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i,$$

telle que la série soit convergente sur un rayon non nulle $|z| < a$. Alors, la nouvelle série

$$S(z, f^{\langle 1\rangle}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n f^{\langle n\rangle},$$

est convergente pour tout z et pour toute fonction f tant qu'elle est bornée.

Démonstration. Si la série $S(z)$ converge pour un rayon non nul $|z| < a$ cela implique, grâce au théorème de Cauchy, que la limite $\sqrt[n]{a_n}$ existe et par conséquent $|a_n| < M^n$ où M est une constante à déterminer.

De plus, par hypothèse f est bornée de telle sortes que $|f(x,y)| < L$. Par conséquent,

$$\left|f^{\langle n\rangle}\right| < \frac{L^n\,|y-x|^{n-1}}{(n-1)!},$$

de sorte que

$$\left|a_n z^n f^{\langle n\rangle}\right| < |MLz|^n\,\frac{|y-x|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Or, les termes sont en valeur absolue plus petits que les termes d'une série exponentielle et la série est ainsi convergente. □

De façon générale, si la série

$$\phi(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{i_1, i_2, \ldots i_n}^{\infty} a_{i_1, i_2, \ldots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \cdots z_n^{i_n},$$

est convergente pour un certain rayon $|z|$ alors la série

$$\phi(f_1^{\langle 1\rangle}, f_2^{\langle 1\rangle}, \ldots, f_n^{\langle 1\rangle}) = \sum_{i_1, i_2, \ldots i_n}^{\infty} a_{i_1, i_2, \ldots i_n} f_1^{\langle 1\rangle} \star f_2^{\langle 1\rangle} \star \cdots f_n^{\langle 1\rangle}$$

est convergente tant que les $f_i^{\langle 1\rangle}$ sont bornées et représentent une fonction de x, y permutable avec toutes les fonctions $f_i^{\langle 1\rangle}$. Elle est aussi une fonctionnelle des fonctions $f_i^{\langle 1\rangle}$. La définition suivante indique comment seront définies les fonctions de composition.

Définition 6.1.1.1 (fonction de composition) *Soit une fonction analytique $\phi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ et régulière autour de $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$, alors nous définirons la fonction de composition associée obtenue en remplaçant la multiplication par la composition et en effectuant le changement $z_i \to f_i^{\langle i\rangle}$. Nous noterons la transformation*

$$\phi(z_1, z_2, \ldots, z_n) \to \phi(f_1^{\langle 1\rangle}, f_2^{\langle 1\rangle}, \ldots, f_n^{\langle 1\rangle}).$$

Le théorème suivant montre comment le produit traditionnel se traduit en termes de composition de premier type.

Théorème 6.1.2 ([28] [30]) *Soit $\phi_1(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ et $\phi_2(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ deux fonctions analytiques de leurs arguments et régulières dans la région $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$, de telle sorte que*

$$\phi_3(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \phi_1(z_1, z_2, \ldots, z_n)\phi_2(z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

alors la relation suivante est valide

$$\phi_3(f_1^{\langle 1\rangle}, f_1^{\langle 2\rangle}, \ldots, f_1^{\langle n\rangle}) = \phi_1(f_1^{\langle 1\rangle}, f_1^{\langle 2\rangle}, \ldots, f_1^{\langle n\rangle}) \star \phi_2(f_1^{\langle 1\rangle}, f_1^{\langle 2\rangle}, \ldots, f_1^{\langle n\rangle}).$$

On peut utiliser ce théorème pour donner un sens à certaines constructions reliées aux polynômes standards. L'exemple suivant montre une façon d'adapter la formule quadratique à la composition. Soit f une fonction inconnue, ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 trois fonctions permutables entre elles et l'équation suivante

$$a_1 f^{\langle 1\rangle} + \phi_1 \star f^{\langle 1\rangle} + a_2 f^{\langle 2\rangle} + \phi_2 \star f^{\langle 2\rangle} = \phi_0$$

pouvant être écrite comme

$$\left(a_1 \star f^{\langle 0\rangle} + \phi_1\right) \star f^{\langle 1\rangle} + \left(a_2 f^{\langle 0\rangle} + \phi_2\right) \star f^{\langle 2\rangle} = \phi_0. \tag{6.1}$$

Cette équation est reliée à l'équation algébrique suivante

$$(a_1 + u_1)\, z + (a_2 + u_2)\, z^2 = u_0 \tag{6.2}$$

qui a pour solution positive

$$z = \frac{-(a_1 + u_1) + \sqrt{(a_1 + u_1)^2 + 4u_0\,(a_2 + u_2)}}{2(a_2 + u_2)} \tag{6.3}$$

soit simplement la formule quadratique $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ qui est la solution du polynôme $az^2 + bz + c = 0$. La solution z s'annule pour $u_0 = u_1 = u_2 = 0$. On peut donc obtenir de l'équation (6.3) une représentation en série de puissances en termes des u. En remplaçant les puissances des u par les puissances de composition des ϕ, on obtient une solution de l'équation (6.1). Il est à noter que bien que l'équation (6.2) possède deux solutions, l'équation intégrale (6.1) ne possède qu'une seule solution obtenue de (6.3).

Soit les fonctions $\mathbf{1}(x, y)$ et $\sigma(x, y)$ définies par

$$\mathbf{1}(x, y) \equiv 1 \qquad \text{et} \qquad \sigma(x, y) \equiv \frac{\Phi(y)}{\Phi(x)}.$$

Par calcul direct on trouve

$$(\mathbf{1} \star \sigma)(x_0, x) = \Phi(x)\mathrm{X}^{(1)}(x_0, x), \qquad (\mathbf{1} \star \sigma^{-1})(x_0, x) = \frac{1}{\Phi(x)}\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}(x_0, x),$$

$$(\mathbf{1} \star \sigma \star \mathbf{1})(x_0, x) = \frac{\mathrm{X}^{(2)}(x_0, x)}{2!}, \qquad (\mathbf{1} \star \sigma^{-1} \star \mathbf{1})(x_0, x) = \frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2)}(x_0, x)}{2!},$$

$$(\mathbf{1} \star \sigma)^{\langle 2\rangle}(x_0, x) = \Phi(x)\frac{\mathrm{X}^{(3)}(x_0, x)}{3!}, \qquad (\mathbf{1} \star \sigma^{-1})^{\langle 2\rangle}(x_0, x) = \frac{1}{\Phi(x)}\frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(3)}(x_0, x)}{3!}, \ldots$$

Posons $(1 \star \sigma) = \Phi(x)\mathrm{X}^{(1)}(x_0, x)$ et $(1 \star \sigma^{-1}) = \frac{1}{\Phi(x)}\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}(x_0, x)$, alors pour $n \geq 1$ on trouve

$$\left(\Phi(x)\mathrm{X}^{(1)}(x_0, x)\right)^{\langle n\rangle} = \Phi(x)\frac{\mathrm{X}^{(2n-1)}(x_0, x)}{(2n-1)!},$$

$$\left(\frac{1}{\Phi(x)}\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}(x_0, x)\right)^{\langle n\rangle} = \frac{1}{\Phi(x)}\frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2n-1)}(x_0, x)}{(2n-1)!},$$

$$\left(\Phi(x)\mathrm{X}^{(1)}(x_0, x)\right)^{\langle n\rangle} \star \mathbf{1} = \frac{\mathrm{X}^{(2n)}(x_0, x)}{(2n)!},$$

et

$$\left(\frac{1}{\Phi(x)}\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}(x_0,x)\right)^{\langle n\rangle}\star\mathbf{1}=\frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2n)}(x_0,x)}{(2n)!}.$$

Proposition 6.1.2.1 *Les identités suivantes sont valides pour la composition de premier type de Volterra pour les fonctions de puissances Φ-généralisées :*

$$\begin{aligned}
\Phi(x)\mathrm{X}^{(2n-1)}(x_0,x)\star\mathrm{X}^{(2m)}(x_0,x)&=A_{n,m}\mathrm{X}^{(2n+2m)}(x_0,x),\\
\frac{1}{\Phi(x)}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2n-1)}(x_0,x)\star\widetilde{\mathrm{X}}^{(2m)}(x_0,x)&=A_{n,m}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2n+2m)}(x_0,x),\\
\Phi(x)\mathrm{X}^{(2n-1)}(x_0,x)\star\mathrm{X}^{(2m-1)}(x_0,x)&=B_{n,m}\mathrm{X}^{(2n+2m-1)}(x_0,x),\\
\frac{1}{\Phi(x)}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2n-1)}(x_0,x)\star\mathrm{X}^{(2m-1)}(x_0,x)&=B_{n,m}\widetilde{\mathrm{X}}^{(2n+2m-1)}(x_0,x),
\end{aligned}$$

où

$$A_{n,m}:=frac(2n-1)!(2m)!(2n+2m)!,\qquad B_{n,m}:=\frac{(2n-1)!(2m-1)!}{(2n+2m-1)!},\qquad n,m\geq 1.$$

Démonstration. La première identité s'obtient de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\Phi\mathrm{X}^{(2n-1)}\star\mathrm{X}^{(2m)}&=(2n-1)!\left(\Phi\mathrm{X}^{(1)}\right)^{\langle n\rangle}\star(2m)!\left[\left(\Phi\mathrm{X}^{(1)}\right)^{\langle n\rangle}\star\mathbf{1}\right]\\
&=(2n-1)!(2m)!\left[\left(\Phi\mathrm{X}^{(1)}\right)^{\langle n+m\rangle}\star\mathbf{1}\right]\\
&=(2n-1)!(2m)!\frac{\mathrm{X}^{(2n+2m)}}{(2n+2m)!}.
\end{aligned}$$

Les autres identités s'obtiennent de façon similaire. □

6.2 Application à l'équation de Schrödinger

Théorème 6.2.1 *Soit un intervalle réel et fini $[a,b]$ et $\psi_0(x)$ une solution de l'équation de Schrödinger $-\frac{1}{2}\psi_0''(x)+V(x)\psi_0(x)=0$ de telle sorte que $\psi_0^2(x)$ et $1/\psi_0^2(x)$ sont continues sur $[a,b]$. Alors la solution générale de l'équation de Schrödinger $-\frac{1}{2}\psi''(x)+V(x)\psi=\lambda\psi(x)$ sur $[a,b]$ a la forme*

$$\psi(x)=c_1\psi_0\int_{x_0}^{x}\frac{1}{1-\lambda\widetilde{\rho}^{\langle 1\rangle}}d\xi+\frac{c_2}{\psi_0}\left(\frac{\rho^{\langle 1\rangle}}{1-\lambda\rho^{\langle 1\rangle}}\right),\tag{6.4}$$

où

$$\rho(x_0,x)=\psi_0^2(x)\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\psi_0^2(\xi)},\qquad \widetilde{\rho}(x_0,x)=\frac{1}{\psi_0^2(x)}\int_{x_0}^{x}\psi_0^2(\xi)d\xi$$

et c_1,c_2 sont deux constantes complexes arbitraires et x_0 est un point fixe arbitraire dans $[a,b]$.

Démonstration. Posons $\Phi = \psi_0^2$, étant donné les définitions 3.39 ,3.40 et le résultat 3.4, la solution générale de $\frac{-1}{2}\psi''(x) + V(x)\psi = \lambda\psi(x)$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\psi &= c_1\psi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{\widetilde{\mathrm{X}}^{(2k)}}{(2k)!} + c_2\psi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{\mathrm{X}^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \\
&= c_1\psi_0 \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \left[\left(\frac{1}{\psi_0^2} \widetilde{\mathrm{X}}^{(1)} \right)^{\langle k \rangle} \star \mathbf{1} \right] \right\} + c_2\psi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{1}{\psi_0^2} \left(\psi_0^2 \mathrm{X}^{(1)} \right)^{\langle k+1 \rangle} \\
&= c_1\psi_0 \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \left[\widetilde{\rho}^{\langle k \rangle} \star \mathbf{1} \right] \right\} + c_2\psi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{1}{\psi_0^2} \rho^{\langle k+1 \rangle}
\end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue du fait que

$$\frac{1}{\psi_0^2}\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)} = \frac{1}{\psi_0^2}\int_{x_0}^{x} \psi_0^2(\xi)d\xi = \widetilde{\rho}, \qquad \psi_0^2\mathrm{X}^{(1)} = \psi_0^2 \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\psi_0^2(\xi)} d\xi$$

Or, de l'associativité de la composition de Volterra et puisque $\widetilde{\rho}^{\langle 0 \rangle} \star \mathbf{1} = 1$ l'équation devient

$$\psi = c_1\psi_0 \left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \widetilde{\rho}^{\langle k+1 \rangle} \right) \star \mathbf{1} \right] + \frac{c_2}{\psi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \rho^{\langle k+1 \rangle}. \tag{6.5}$$

Or la série géométrique est donnée par

$$\Omega(\lambda; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k z^k = \frac{1}{1-\lambda z},$$

et pour la multiplication usuelle cette égalité est valide tant que $|\lambda z| < 1$. Pour la composition de Volterra l'équation 6.5 devient

$$\begin{aligned}
u &= c_1\psi_0 \left(\Omega(\lambda; p^{\langle 1 \rangle}) \right) + \frac{c_2}{\psi_0} \rho^{\langle 1 \rangle} \star \Omega(\lambda, \rho^{\langle 1 \rangle}) \\
&= c_1\psi_0 \left(\frac{1}{1-\lambda\widetilde{\rho}^{\langle 1 \rangle}} \star \mathbf{1} \right) + \frac{c_2}{\psi_0} \left(\frac{\rho^{\langle 1 \rangle}}{1-\lambda\rho^{\langle 1 \rangle}} \right),
\end{aligned}$$

et les séries géométriques $\Omega(\lambda, \widetilde{\rho}^{\langle 1 \rangle}), \Omega(\lambda, \rho^{\langle 1 \rangle})$ convergent pour toutes valeurs de x, x_0 et λ. De plus, par la définition de la composition de Volterra, le premier terme peut être écrit comme

$$c_1\psi_0 \left(\frac{1}{1-\lambda\widetilde{\rho}^{\langle 1 \rangle}} \star \mathbf{1} \right) = c_1\psi_0 \int_{x_0}^{x} \frac{1}{1-\lambda\widetilde{\rho}^{\langle 1 \rangle}(x_0, \xi)} d\xi.$$

ce qui complète la preuve.

□

Conclusion

Les fonctions de puissances Φ-généralisées ont été présentées à la fois dans leur contexte d'apparition (solution de Sturm-Liouville) et dans un contexte similaire aux puissances standard $(x - x_0)^n$. Plusieurs propriétés similaires ont été présentées dont un théorème binomial et des propriétés de symétries. Deux représentations ont été présentées, la première basée sur une algèbre de mots possédant un produit nommé *shuffle* produit. Il a été montré que cette représentation permet de générer plusieurs identités et offre un produit qui agit bien avec l'opérateur intégral. La seconde représentation présentée définit un produit sous forme d'intégrale appelé composition de Volterra. Cette méthode permet de fabriquer des fonctions ayant des propriétés algébriques similaires aux séries de puissances standard. Il reste encore beaucoup de travail de recherche afin de mieux comprendre les implications de cette représentation. Les fonctions de puissances Φ-généralisées semblent, selon nos recherches préliminaires, avoir un impact direct en mécanique quantique supersymétrique.

Plusieurs autres applications sont aussi envisageables. Il serait intéressant, par exemple, de définir une série et une transformée de fourrier généralisées et d'étudier pour quelles applications elles peuvent être utiles. De plus, il semble envisageable d'utiliser ces fonctions dans l'étude des milieux continus. Afin d'accélérer le calcul et même d'espérer trouver des formules analytiques pour les fonctions de puissances Φ-généralisées, il serait d'intérêt d'étudier les séries de Tayor des puissances Φ-généralisées. Il pourrait aussi être intéressant d'étudier la possibilité de faire du calcul variationnel sur les puissances généralisées en faisant, par exemple, varier Φ.

Finalement, plusieurs questions restent encore ouvertes. Par exemple, rien n'est encore connu pour les propriétés trigonométriques généralisées. L'existence d'identité similaire au théorème binomial avec une portée plus grande est aussi un sujet d'intérêt. Le calcul ombrelle est une sphère de recherche qui s'apparente beaucoup avec nos questions actuelles.

Bibliographie

[1] Richard Bellman et al. The stability of solutions of linear differential equations. *Duke Mathematical Journal*, 10(4) :643–647, 1943.

[2] Garrett Birkhoff and Gian-Carlo Rota. On the completeness of sturm-liouville expansions. *The American Mathematical Monthly*, 67(9), 1960.

[3] Jonathan M Borwein, David M Bradley, David J Broadhurst, and Petr Lisoněk. Combinatorial aspects of multiple zeta values. *the electronic journal of combinatorics*, 5(1), 1998.

[4] Douglas Bowman and David M Bradley. The algebra and combinatorics of shuffles andmultiple zeta values. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 97(1), 2002.

[5] Kuo-Tsai Chen. Iterated integrals and exponential homomorphisms. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1), 1954.

[6] Kuo-Tsai Chen. Integration of paths, geometric invariants and a generalized baker-hausdorff formula. *Annals of Mathematics*, 1957.

[7] Kuo-Tsai Chen. Algebras of iterated path integrals and fundamental groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 156, 1971.

[8] William Benjamin Fite. Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 19(4), 1918.

[9] Édouard Goursat. *Cours d'analyse mathématique : Théorie des fonctions analytiques ; équations différentielles ; équations aux dérivées partielles ; éléments du calcul des variations*, volume 2. Gauthier-Villars, 1905.

[10] Russell Herman. A second course in ordinary differential equations : Dynamical systems and boundary value problems, 2008.

[11] Kira V. Khmelnytskaya, Vladislav V. Kravchenko, and Jesús A. Baldenebro-Obeso. Spectral parameter power series for fourth-order sturm–liouville problems. *Applied Mathematics and Computation*, 219(8), 2012.

[12] Kira V. Khmelnytskaya, Vladislav V. Kravchenko, and Haret C. Rosu. Eigenvalue problems, spectral parameter power series, and modern applications. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38(10), 2015.

[13] Vladislav V Kravchenko. *Applied pseudoanalytic function theory.* Springer Science & Business Media, 2009.

[14] Vladislav V. Kravchenko, Samy Morelos, and Sergii M. Torba. Liouville transformation, analytic approximation of transmutation operators and solution of spectral problems. *Applied Mathematics and Computation*, 273, 2016.

[15] Vladislav V. Kravchenko, Samy Morelos, and Sébastien Tremblay. Complete systems of recursive integrals and Taylor series for solutions of Sturm-Liouville equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 35(6), 2012.

[16] Vladislav V. Kravchenko and R. Michael Porter. Spectral parameter power series for Sturm-Liouville problems. *arXiv*, nov 2008.

[17] Vladislav V. Kravchenko and R. Michael Porter. Spectral parameter power series for sturm–liouville problems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 33(4), 2010.

[18] Vladislav V. Kravchenko and Sergii M. Torba. *Transmutations and Spectral Parameter Power Series in Eigenvalue Problems.* Springer Basel, Basel, 2013.

[19] Man Kam Kwong and A Zettl. Integral inequalities and second order linear oscillation. *Journal of Differential Equations*, 45(1), 1982.

[20] Serge Lang. *Graduate Texts in Mathematics : Algebra.* Springer, 2002.

[21] Norman R. Lebovitz. *Ordinary differential equations.* Brooks and Cole Publication Company, 1999.

[22] Vladimir A. Marchenko. *Sturm-Liouville Operators and Applications.* Operator Theory : Advances and Applications 22. Birkhäuser Basel, 1 edition, 1986.

[23] M Moriconi. Nodes of wavefunctions. *American Journal of Physics*, 75(3), 2007.

[24] Mathieu Ouellet and Sébastien Tremblay. Supersymmetric generalized power functions. *arXiv, arxiv.org/abs/1905.07509*, 2019.

[25] Rimhak Ree. Lie elements and an algebra associated with shuffles. *Annals of Mathematics*, 1958.

[26] Walter Rudin et al. *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-hill New York, 1964.

[27] Strien van Sebastian. Ordinary differential equation, lecture notes, wwwf.imperial.ac.uk/ svanstri/files/de-3rd.pdf, imperial college, london, 2015.

[28] Vito Volterra. *The theory of permutable functions.* Princeton University Press, 1915.

[29] Vito Volterra. Functions of composition. *Rice Institute Pamphlet-Rice University Studies*, 7(4), 1920.

[30] Vito Volterra and Joseph Pérès. *Leçons sur la Composition et les Fonctions Permutables.* Gauthier-Villars, 1924.

[31] D. V. Widder. A Generalization of Taylor's Series. *Transactions of the American Mathematical Society*, 30(1), 1928.

[32] D. V. Widder. On the expansion of analytic functions of the complex variable in generalized Taylor's series. *Transactions of the American Mathematical Society*, 31(1), 1929.

[33] Aurel Wintner. A criterion of oscillatory stability. *Quarterly of Applied Mathematics*, 7(1), 1949.

[34] Don Zagier. Values of zeta functions and their applications. *First European Congress of Mathematics Paris, July 6–10, 1992*, 1994.