SOLUTIONNAIRE : DUAL

EXERCICES

1 Formulation du dual

(1) PROBLÈME–PPL : Maximiser $z = x_1 + 7x_2$ sujet aux contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

où $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$.
DUAL : Le nombre de variables est déterminé par le nombre de contrainte du primal : il y a donc 3 variables dans le modèle **dual.** Le nombre de contraintes dans le dual est égal au nombre de variables dans le primal : il y a deux contraintes. DUAL : Minimiser

$$w = 8y_1 + 6y_2 + 2y_3$$

sujet aux contraintes

$$\begin{aligned} y_1 - 2y_2 + y_3 &\geq 1 \\ y_1 + 3y_2 - y_3 &\geq 7 \end{aligned}$$

avec $y_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, 3$.

- La premième contrainte est déterminée par les coefficient de la première variable (x_1) dans chacune des contraintes du primal (du PPL original) sous forme standard. x_1 a comme coefficient 1 pour la première contrainte (y_1), -2 pour la deuxième contrainte (y_2) et 1 pour la troisième contrainte (y_3).
- La deuxième contrainte est déterminée par les coefficient de la deuxième variable (x_2) dans chacune des contraintes du primal (du PPL original) sous forme standard. x_2 a comme coefficient 1 pour la première contrainte (y_1), 3 pour la deuxième contrainte (y_2) et -1 pour la troisième contrainte (y_3).

(2) PROBLÈME–PPL : Maximiser $x_1 - 3x_2 = z$ sujet aux contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

où $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$.
DUAL : Le modèle n'est pas sous forme canonique : il est plus simple de considérer la forme canonique pour construire le dual.

FORME CANONIQUE DU PPL : Maximiser $x_1 - 3x_2 = z$ sujet aux contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 8 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq -6 \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

où $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$.

- Il y a 3 contraintes dans le PPL donc il y a 3 variables dans le **dual**
- Il y a 2 variables de décision dans le PPL donc il y a deux contraintes dans le dual.

DUAL : Minimiser

$$w = 8y_1 - 6y_2 + 2y_3$$

sujet aux contraintes

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq 1 \\ y_1 - 3y_2 - y_3 &\geq -3 \end{aligned}$$

avec $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ et $y_3 \geq 0$.

- La premième contrainte est déterminée par les coefficient de la première variable (x_1) dans chacune des contraintes du primal (du PPL original) sous forme standard. x_1 a comme coefficient 1 pour la première contrainte (y_1), 2 pour la deuxième contrainte (y_2) et 1 pour la troisième contrainte (y_3).
- La deuxième contrainte est déterminée par les coefficient de la deuxième variable (x_2) dans chacune des contraintes du primal (du PPL original) sous forme standard. x_2 a comme coefficient 1 pour la première contrainte (y_1), -3 pour la deuxième contrainte (y_2) et -1 pour la troisième contrainte (y_3).

(3) PROBLÈME-PPL : Maximiser $z = 6x_1 + 5x_2$ sujet aux contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

avec $x_i \geq 0$

Le problème est déjà sous forme canonique.

- Il y a 3 contraintes dans le PPL donc 3 variables dans le modèle **dual**
- Il y a deux variables de décision dans le PPL donc deux contraintes dans le dual.

DUAL : Minimiser

$$w = 8y_1 + 6y_2 + 2y_3$$

sujet aux contraintes

$$\begin{aligned} y_1 - 2y_2 + y_3 &\geq 6 \\ y_1 + 3y_2 - y_3 &\geq 5 \end{aligned}$$

avec $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ et $y_3 \geq 0$.

- La premième contrainte est déterminée par les coefficient de la première variable (x_1) dans chacune des contraintes du primal (du PPL original) sous forme standard. x_1 a comme coefficient 1 pour la première contrainte (y_1), -2 pour la deuxième contrainte (y_2) et 1 pour la troisième contrainte (y_3).
- La deuxième contrainte est déterminée par les coefficient de la deuxième variable (x_2)

dans chacune des contraintes du primal (du PPL original) sous forme standard. x_2 a comme coefficient 1 pour la première contrainte (y_1), 3 pour la deuxième contrainte (y_2) et -1 pour la troisième contrainte (y_3).

(4) PROBLÈME–PPL : Maximiser $z = 5x_1 + 5x_2$ sujet aux contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

où $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$.
Le modèle **primal** sous sa forme canonique est donné par :
Maximiser $z = 5x_1 + 5x_2$ sujet aux contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 8 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq -6 \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

où $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$.

- Il y a 3 variables dans le modèle **dual** (nombre de contraintes dans le PPL)
- Il y a deux contraintes dans le modèle dual (nombre de variables dans le PPL).

DUAL : Minimiser

$$w = 8y_1 - 6y_2 + 2y_3$$

sujet aux contraintes

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq 5 \\ y_1 - 3y_2 - y_3 &\geq 5 \end{aligned}$$

avec $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ et $y_3 \geq 0$.

- La premième contrainte est déterminée par les coefficient de la première variable (x_1) dans chacune des contraintes du primal (du PPL original) sous forme standard. x_1 a comme coefficient 1 pour la première contrainte (y_1), 2 pour la deuxième contrainte (y_2) et 1 pour la troisième contrainte (y_3).
- La deuxième contrainte est déterminée par les coefficient de la deuxième variable (x_2) dans chacune des contraintes du primal (du PPL original) sous forme standard. x_2 a comme coefficient 1 pour la première contrainte (y_1), -3 pour la deuxième contrainte (y_2) et -1 pour la troisième contrainte (y_3).

(5) PROBLÈME – PPL : Maximiser $z = 6x_1 + 5x_2$ sujet aux contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 - x_2 &\geq 2 \end{aligned}$$

où $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$.
DUAL : La forme canonique du modèle **primal** est de maximiser $z = 6x_1 + 5x_2$ sujet aux contraintes

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 &\leq -8 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq -6 \\ -x_1 + x_2 &\leq -2 \end{aligned}$$

où $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$.

- Il y a trois variables dans le modèle **dual**
- Il y a deux contraintes dans le modèle dual.

DUAL : Minimiser
$$w = -8y_1 - 6y_2 - 2y_3$$
sujet aux contraintes
$$\begin{aligned} -y_1 + 2y_2 - y_3 &\geq 6 \\ -y_1 - 3y_2 + y_3 &\geq 5 \end{aligned}$$
avec $y_i \geq 0$, pour $i = 1, 2, 3$...

- La premième contrainte est déterminée par les coefficient de la première variable (x_1) dans chacune des contraintes du primal (du PPL original) sous forme standard. x_1 a comme coefficient -1 pour la première contrainte (y_1), 2 pour la deuxième contrainte (y_2) et -1 pour la troisième contrainte (y_3).
- La deuxième contrainte est déterminée par les coefficient de la deuxième variable (x_2) dans chacune des contraintes du primal (du PPL original) sous forme standard. x_2 a comme coefficient -1 pour la première contrainte (y_1), -3 pour la deuxième contrainte (y_2) et 1 pour la troisième contrainte (y_3).

(6) PROBLÈME : Une compagnie fabrique deux types d'acier : Acier trempé (T) et l'acier détrempé (D). Le profit pour une tonne d'acier est de 6k\$ et 4k\$ pour l'acier T et D respectivement. Il faut 2 et 3 tonnes de matières premières pour les aciers T et D respectivement tandis que le temps de production est respectivement de 6 et 4 unités. La compagnie dispose de 120 tonnes de matières premières et de 100 unités de temps.
PPL : Le problème de programmation linéaire sous forme canonique est de maximiser
$$z = 6x_1 + 4x_2$$
sujet aux contraintes
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 120 \\ 6x_1 + 4x_2 &\leq 100 \end{aligned}$$
et $x_i \geq 0$ pour $i = 1, 2$.

- Le **dual** comprend 2 variables
- Le dual comprend 2 contraintes

DUAL : Minimiser
$$w = 120y_1 + 100y_2$$
sujet aux contraintes
$$\begin{aligned} 2y_1 + 6y_2 &\geq 6 \\ 3y_1 + 4y_2 &\geq 4 \end{aligned}$$
avec $y_1 \geq 0$ et $y_2 \geq 0$.

(7) PROBLÈME : Un constructeur automobile doit livrer son modèle AA à 4 concessionnaires à partir de trois usines de production. Les disponibilités aux usines sont respectivement de 80, 40 et 100 unités tandis que les démandes des vendeurs sont de 40, 75, 25 et 60 pour les concessionnaires I, II, III et IV respectivement. Les coûts de livraison des automobiles, en

centaine de $, sont donnés par le tableau suivant :

		Concessionnaire			
		I	**II**	**III**	**IV**
	1	4	2	6	4
Usines	**2**	8	6	10	8
	3	6	4	8	6

On cherche à établir le plan de livraison optimal.
VARIABLES DE DÉCISION : Considérons x_{ij} les variables de décision qui donnent le nombre de véhicules livrés de l'usine i vers le concessionnaire j. On cherche à minimiser le coût de la livraison.
Le PPL donne comme fonction objectif à minimiser :

$$4x_{11} + 8x_{21} + 6x_{31} + 2x_{12} + 6x_{22} + 4x_{32} +$$
$$6x_{13} + 10x_{23} + 8x_{33} + 4x_{14} + 8x_{24} + 6x_{34}$$

Les contraintes sont des contraintes de production et des contraintes de demande :

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leq 80 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leq 40 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\leq 100 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 40 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &\geq 75 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &\geq 25 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} &\geq 60
\end{aligned}$$

avec les contraintes de non négativité $x_{ij} \geq 0$.
Le modèle sous sa forme canonique est de maximiser

$$\begin{aligned}
z = & -4x_{11} - 8x_{21} - 6x_{31} - 2x_{12} - 6x_{22} - 4x_{32} - \\
& 6x_{13} - 10x_{23} - 8x_{33} - 4x_{14} - 8x_{24} - 6x_{34}
\end{aligned}$$

sujet à

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leq 80 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leq 40 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\leq 100 \\
-x_{11} - x_{21} - x_{31} &\leq -40 \\
-x_{12} - x_{22} - x_{32} &\leq -75 \\
-x_{13} - x_{23} - x_{33} &\leq -25 \\
-x_{14} - x_{24} - x_{34} &\leq -60
\end{aligned}$$

- Puisqu'il y a 7 contraintes pour le PPL dans sa forme canonique, le dual a 7 variables
- Puisqu'il y a 12 variables dans le PPL sous sa forme canonique il y a 12 contraintes dans le dual.

DUAL : Minimiser

$$w = 80y_1 + 40y_2 + 100y_3 - 40y_4 - 75y_5 - 25y_6 - 60y_7$$

sujet aux contraintes

$$
\begin{aligned}
y_1 - y_4 &\geq -4 \\
y_2 - y_4 &\geq -8 \\
y_3 - y_4 &\geq -6 \\
y_1 - y_5 &\geq -2 \\
y_2 - y_5 &\geq -6 \\
y_3 - y_5 &\geq -4 \\
y_1 - y_6 &\geq -6 \\
y_2 - y_6 &\geq -10 \\
y_3 - y_6 &\geq -8 \\
y_1 - y_7 &\geq -4 \\
y_2 - y_7 &\geq -8 \\
y_3 - y_7 &\geq -6
\end{aligned}
$$

avec $y_i \geq 0$ pour $i = 1, \ldots, 7$.

- Pour la première contrainte du dual on s'intéresse aux coefficients de la variable x_{11} dans chaque contrainte du PPL. x_{11} se retrouve avec un coefficient 1 dans la première contrainte et -1 dans la quatrièmre contrainte du PPL sous forme canonique.
- On procède de la même façon pour la variable x_{21} ce qui donne la deuxième contrainte du dual. Le même principe est appliqué pour toutes les variables du PPL pour donner chacune des contraintes du dual.

(8) PROBLÈME : Une compagnie fabrique 3 modèles de jouets : voiture de police, camions de pompiers et avions à réaction. À cet effet, elle utilise du bois et du plastique dont elle dispose à raison de 2500 et 3500 unités respectivement.
Les quantités de matières premières en unité nécessaires à la fabrication d'un jouet sont les suivantes : Voiture (3 bois et 5 plastique), camion (5 bois et 3 plastique), avion (7 bois et 4 plastique). Le temps de travail nécessaire pour produire un avion est le double de celui nécessaire pour produire un camion et le triple de celui nécessaire pour produire une voiture. La capacité de production de l'entreprise est équivalente à 600 avions. Une étude de marché indique que la demande minimale pour chaque jouet est de 125 unités. Cependant, on doit produire deux fois plus de voitures que d'avions. Les profits sont de 20$, 25$ et 50$ pour les voitures, les camions et les avions respectivement. Maximiser les profits.
DUAL : Posons les variables x_i le nombre de jouets du type i ou le type 1 représente la voiture de police, le type 2 le camion de pompier et le type 3 l'avion à réaction. La fonction à maximiser est

$$z = 20x_1 + 25x_2 + 50x_3$$

avec les contraintes

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{3}x_1 + 0.5x_2 + x_3 & \leq & 600 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 & \leq & 2500 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 & \leq & 3500 \\ x_1 - 2x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

On a aussi les contraintes $x_i \geq 125$ pour $i = 1, 2, 3$.
FORME CANONIQUE : Maximiser

$$z = 20x_1 + 25x_2 + 50x_3$$

avec les contraintes

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{3}x_1 + 0.5x_2 + x_3 & \leq & 600 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 & \leq & 2500 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 & \leq & 3500 \\ -x_1 + 2x_3 & \leq & 0 \end{array}$$

On a aussi les contraintes $-x_i \leq -125$

– Le dual contient 7 variables puisqu'il y a 7 contraintes dans le PPL
– Le dual contient 3 contraintes puisqu'il y a trois variables dans le PPL.

DUAL : Minimiser

$$w = 600y_1 + 2500y_2 + 3500y_3 - 125y_5 - 125y_6 - 125y_7$$

sujet aux contraintes :

$$\begin{array}{rcl} 1/3y_1 + 3y_2 + 5y_3 - y_4 - y_5 & \geq & 20 \\ 0.5y_1 + 5y_2 + 3y_3 - y_6 & \geq & 25 \\ y_1 + 7y_2 + 4y_3 + 2y_4 - y_7 & \geq & 50 \end{array}$$

sujet à $y_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, 3$.

(9) PROBLÈME : Un laboratoire conduit des tests sur la composition des sols. Il peut traiter jusqu'à 1200 échantillons de sol par jour. Il a un contrat avec la coopérative agricole régionale pour le traitement quotidien de 400 échantillons. Le laboratoire traite également des échantillons de sols de jardins privés et de parcs municipaux. Les profits réalisés sont 0,18$ par échantillon en provenance de la coopérative agricole, 0,23$ par échantillon de jardins privés et 0,21$ par échantillon de parcs municipaux. Ce laboratoire ne dispose que de 1400 unités de temps de traitement par jour.
Les échantillons de la coopérative agricole nécessitent deux fois plus de temps que ceux des parcs municipaux, qui eux prennent une unité de temps de traitement. Les échantillons des jardins privés nécessitent 1,5 unité de temps de traitement. Le laboratoire doit se maintenir dans les bonnes grâces du conseil municipal et, par conséquent, ne peut pas traiter plus d'échantillons de jardins privés que d'échantillons de parc municipaux. Maximiser les profits.
VARIABLES DE DÉCISION : Soit les variables de décision

– x_1 : nombre d'analyses pour la coopérative agricole
– x_2 : nombre d'analyses pour des jardins privés
– x_3 : nombre d'analyses pour les parcs municipaux.

PPL : Maximiser

$$z = 0.18x_1 + 0.23x_2 + 0.21x_3$$

sujet aux contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1200 \\ -x_1 &\leq -400 \\ 2x_1 + 1.5x_2 + x_3 &\leq 1400 \\ x_2 - x_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

avec $x_i \geq 0$.
FORME CANONIQUE : Le problème est sous forme canonique.
DUAL :

- Le dual a 4 variables puisque le PPL sous forme canonique a 4 contraintes
- Le dual a 3 contraintes puisque le PPL sous forme canonique a 3 variables.

DUAL : Minimiser

$$w = 1200y_1 - 400y_2 + 1400y_3$$

sujet aux contraintes

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 + 2y_3 &\geq 0.18 \\ y_1 + 1.5y_3 + y_4 &\geq 0.23 \\ y_1 + y_3 - y_4 &\geq 0.21 \end{aligned}$$

avec $y_i \geq 0$.

- La première contrainte du dual est donnée par les coefficients de la variable x_1 à chaque contrtainte (1,1,2,0).
- Pour la deuxième contrainte c'est le même principe mais pour la variable x_2 du PPL. C'est la même chose pour les autres contraintes.

(10)PROBLÈME : Une compagnie construit des circuits électriques qui nécessitent plusieurs composantes et plusieurs étapes de fabrication ou de test. Le tableau suivant résume les données relatives à la production de 7 circuits différents :

Circuit	fab	fini	cont	conc	cap	obj	prix ext.	coût int.
1	5	1	1	3	3	20	150	70
2	2	1	0	1	5	17	175	60
3	1	4	2	3	1	30	180	80
4	3	0	3	2	1	20	105	55
5	1	5	2	2	2	10	220	90
6	0	2	2	3	2	11	205	100
7	2	1	1	1	4	8	120	60
Disponibilité	105	145	130	240	200			

Cela veut dire qu'il y a 105 unités de temps disponible pour la fabrication et que le circuit 1 demande 5 unités. On a aussi 145 unités de temps disponibles pour la finition et le circuit 3, par exemple, en demande 4.
Il faut produire 20 circuits de type 1 au minimum (colonne "objectif") et le prix de cette composante achetée à l'externe est de 150$ tandis que le coût de fabrication est de 70$.
L'objectif est de déterminer les composantes à fabriquer à l'interne dans le but de minimiser

les coûts.

– Le problème est un peu plus complexe dans un cas de PPL défini avec les variables de décision à deux indices du type x_{ij}.

VARIABLES DE DÉCISION : Posons x_{ij} le nombre de circuits de type i qui seront fabriqués en usine si $j = 1$ et en sous-traitance si $j = 2$.

PPL : MINIMISER :

$$\begin{aligned} z &= 70x_{11} + 150x_{12} + 60x_{21} + 175x_{22} + 80x_{31} + 180x_{32} \\ &\quad +55x_{41} + 105x_{42} + 90x_{51} + 220x_{52} + 100x_{61} + 205x_{62} \\ &\quad +60x_{71} + 120x_{72} \end{aligned}$$

sujet aux contraintes

$$\begin{aligned} 5x_{11} + 2x_{21} + x_{31} + 3x_{41} + x_{51} + 2x_{71} &\leq 105 \\ x_{11} + x_{21} + 4x_{31} + 5x_{51} + 2x_{61} + x_{71} &\leq 145 \\ x_{11} + 2x_{31} + 3x_{41} + 2x_{51} + 2x_{61} + x_{71} &\leq 130 \\ 3x_{11} + x_{21} + 3x_{31} + 2x_{41} + 2x_{51} + 3x_{61} + x_{71} &\leq 240 \\ 3x_{11} + 5x_{21} + x_{31} + x_{41} + 2x_{51} + 2x_{61} + 4x_{71} &\leq 200 \\ x_{11} + x_{12} &\geq 20 \\ x_{21} + x_{22} &\geq 17 \\ x_{31} + x_{32} &\geq 30 \\ x_{41} + x_{42} &\geq 20 \\ x_{51} + x_{52} &\geq 10 \\ x_{61} + x_{62} &\geq 11 \\ x_{71} + x_{72} &\geq 8 \end{aligned}$$

FORME CANONIQUE : Maximiser

$$\begin{aligned} &-70x_{11} - 150x_{12} - 60x_{21} - 175x_{22} - 80x_{31} - 180x_{32} \\ &-55x_{41} - 105x_{42} - 90x_{51} - 220x_{52} - 100x_{61} - 205x_{62} \\ &-60x_{71} - 120x_{72} \end{aligned}$$

sujet aux contraintes

$$\begin{array}{rcl}
5x_{11}+2x_{21}+x_{31}+3x_{41}+x_{51}+2x_{71} & \leq & 105\\
x_{11}+x_{21}+4x_{31}+5x_{51}+2x_{61}+x_{71} & \leq & 145\\
x_{11}+2x_{31}+3x_{41}+2x_{51}+2x_{61}+x_{71} & \leq & 130\\
3x_{11}+x_{21}+3x_{31}+2x_{41}+2x_{51}+3x_{61}+x_{71} & \leq & 240\\
3x_{11}+5x_{21}+x_{31}+x_{41}+2x_{51}+2x_{61}+4x_{71} & \leq & 200\\
-x_{11}-x_{12} & \leq & -20\\
-x_{21}-x_{22} & \leq & -17\\
-x_{31}-x_{32} & \leq & -30\\
-x_{41}-x_{42} & \leq & -20\\
-x_{51}-x_{52} & \leq & -10\\
-x_{61}-x_{62} & \leq & -11\\
-x_{71}-x_{72} & \leq & -8
\end{array}$$

DUAL :

- Il y a 16 variables dans le problème initial (ou primal) donc 16 contraintes dans le modèle dual
- Il y a 12 contraintes dans le modèle primale donc 12 variables dans le modèle dual, une pour chaque contrainte.

Le dual est de minimiser

$$\begin{array}{rcl}
w & = & 105y_1+145y_2+130y_3+240y_4+200y_5-20y_6\\
 & & -17y_7-30y_8-20y_9-10y_{10}-11y_{11}-8y_8
\end{array}$$

sujet aux contraintes

$$\begin{array}{rcl}
5y_1+y_2+y_3+3y_4+3y_5-y_6 & \geq & -70\\
-y_6 & \geq & -150\\
2y_1+y_2+y_4+5y_5-y_7 & \geq & -60\\
-y_7 & \geq & -175\\
y_1+4y_2+2y_3+3y_4+y_5-y_8 & \geq & -80\\
-y_8 & \geq & -180\\
3y_1+3y_3+2y_4+y_5-y_9 & \geq & -55\\
-y_9 & \geq & -105\\
y_1+5y_2+2y_3+2y_4+2y_5-y_{10} & \geq & -90\\
-y_{10} & \geq & -220\\
2y_2+2y_3+3y_4+2y_5-y_{11} & \geq & -100\\
-y_{11} & \geq & -205\\
2y_1+y_2+y_3+4y_4-y_{12} & \geq & -60\\
-y_{12} & \geq & -120
\end{array}$$

avec $y_i \geq 0$.

La solution de EXCEL donne les valeurs pour chaque variables dans la section "rapport de sensibilité" : sensibilité"

Cellule	Nom	Finale Valeur	Réduit Coût	Objectif Coefficient	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
B25	Interne type 1	0	24,16666667	70	1E+30	24,16666667
C25	Interne type 2	17	0	60	60,83333333	114,1666667
D25	Interne type 3	24,5	0	80	83,33333333	23,33333333
E25	Interne type 4	10,16666667	0	55	15,26315789	10
F25	Interne type 5	0	250,8333333	220	1E+30	250,8333333
G25	Interne type 6	11	0	100	63,33333333	141,6666667
H25	Interne type 7	8	0	60	5,833333333	114,1666667
B26	Externe type 1	20	0	150	24,16666667	150
C26	Externe type 2	0	60,83333333	175	1E+30	60,83333333
D26	Externe type 3	5,5	0	180	23,33333333	83,33333333
E26	Externe type 4	9,833333333	0	105	10	15,26315789
F26	Externe type 5	10	0	90	250,8333333	90
G26	Externe type 6	0	63,33333333	205	1E+30	63,33333333
H26	Externe type 7	0	5,833333333	120	1E+30	5,833333333

ntraintes

Cellule	Nom	Finale Valeur	Ombre Coût	Contrainte à droite	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
C28	Contraintes Disp Fab	105	-16,66666667	105	20,5	30,5
D28	Contraintes Disp Fini	145	-20,83333333	145	22	98
E28	Contraintes Disp Cont	109,5	0	130	1E+30	20,5
F28	Contraintes Disp Conc	151,8333333	0	240	1E+30	88,16666667
G28	Contraintes Disp Cap	173,6666667	0	200	1E+30	26,33333333
J28	Contraintes Tot 3	30	180	30	1E+30	5,5
L28	Contraintes Tot 5	10	90	10	1E+30	10
I28	Contraintes Tot 2	17	114,1666667	17	6,32	9,111111111
H28	Contraintes Tot 1	20	150	20	1E+30	20
M28	Contraintes Tot 6	11	141,6666667	11	13,66666667	11
N28	Contraintes Tot 7	8	114,1666667	8	8,315789474	8
K28	Contraintes Tot 4	20	105	20	1E+30	9,833333333

La solution du dual est donc (-16.67,-20.83,0,0,0,180,90,114.17,150,141.67,114.17,105). Or les premières variables sont négatives pour excel bien que notre modélisation du dual donne des valeurs strictement positives pour les variables de décision y_i. Cela provient du fait que Excel dans son algorithme du simplexe utilise une construction du dual directe sans passer par la forme canonique. Il ne faut donc pas s'inquièter des solutions du dual de Excel qui donne des valeurs négatives.

L'augmentation de 20 unités à l'usine pour la fabrication est possible puisqu'une augmentation possible de $20,5$ est admissible tout en restant dans le domaine des solutions réalisables. L'impact sur la fonction à optimiser sera de $20 * -16.67 = -333.4$ tandis qu'une augmentation de 22 unités dans la section "finition" donne une réduction des coûts de $22 * -20.83 = -458.26$. Ce qui est nettement mieux.

On ne peut déterminer l'effet d'une augmentation des unités de fabrication ET d'une augmentation des unités de finition en même temps.

Il faut alors refaire le problème puisque la lecture du tableau de sensibilité n'est valide que si on regarde un changement dans une variable à la fois.

(11) PROBLÈME : Un constructeur automobile doit livrer son modèle AA à 4 concessionnaires à partir de trois usines de production. Les disponibilités aux usines sont respectivement de 80, 40 et 100 unités tandis que les démandes des vendeurs sont de 40, 75, 25 et 60 pour les concessionnaires I, II, III et IV respectivement. Les coûts de livraison des automobiles, en

centaine de \$, sont donnés par le tableau suivant :

		Concessionnaire			
		I	**II**	**III**	**IV**
	1	4	2	6	4
Usines	**2**	8	6	10	8
	3	6	4	8	6

On cherche à établir le plan de livraison optimal.

a) Déterminer la solution optimale pour le problème dual.

b) Donner l'effet d'une augmentation de 50 unités à l'usine 2.

c) Si le garage II n'a que 70 véhicules quelle est l'effet sur le plan de livraison ?

d) Si tous les garages demandent 10 automobiles de plus, quel sera l'effet sur la solution optimale ?

Faire une analyse de sensibilité pour la capacité de fabrication des usines.

VARIABLES DE DÉCISION : x_{ij} le nombre d'automobiles envoyées de l'usine i vers le concessionnaire j.

PPL : Minimiser

$$\begin{aligned}&4x_{11} + 2x_{12} + 6x_{13} + 4x_{14} +\\ &8x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23} + 8x_{24} +\\ &6x_{31} + 4x_{32} + 8x_{33} + 6x_{34}\end{aligned}$$

sujet aux contraintes

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leq 80\\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leq 40\\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\leq 100\\ x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 40\\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &\geq 75\\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &\geq 25\\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &\geq 60\end{aligned}$$

et $x_{ij} \geq 0$.

FORME CANONIQUE : Maximiser

$$\begin{aligned}&-4x_{11} - 2x_{12} - 6x_{13} - 4x_{14} -\\ &8x_{21} - 6x_{22} - 10x_{23} - 8x_{24} -\\ &6x_{31} - 4x_{32} - 8x_{33} - 6x_{34}\end{aligned}$$

sujet aux contraintes

$$\begin{aligned}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} &\leq 80 \\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} &\leq 40 \\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} &\leq 100 \\
-x_{11}-x_{21}-x_{31} &\leq -40 \\
-x_{12}-x_{22}-x_{32} &\leq -75 \\
-x_{13}-x_{23}-x_{33} &\leq -25 \\
-x_{14}-x_{24}-x_{34} &\leq -60
\end{aligned}$$

DUAL : Minimiser

$$80y_1+40y_2+100y_3-40y_4-75y_5-25y_6-60y_7$$

sujet à

$$\begin{aligned}
y_1-y_4 &\geq -4 \\
y_1-y_5 &\geq -2 \\
y_1-y_6 &\geq -6 \\
y_1-y_7 &\geq -4 \\
y_2-y_4 &\geq -8 \\
y_2-y_5 &\geq -6 \\
y_2-y_6 &\geq -10 \\
y_2-y_7 &\geq -8 \\
y_3-y_4 &\geq -6 \\
y_3-y_5 &\geq -4 \\
y_3-y_6 &\geq -8 \\
y_3-y_7 &\geq -6
\end{aligned}$$

et $y_i \geq 0$.

SOLUTION PAR LE SOLVEUR EXCEL (SIMPLEXE) :

Cellules variables

Cellule	Nom	Finale Valeur	Réduit Coût	Objectif Coefficient	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
C35	USINE 1 => CONC 1	20	0	4	0	0
D35	USINE 1 => CONC 2	0	0	2	1E+30	0
E35	USINE 1 => CONC 3	0	0	6	1E+30	0
F35	USINE 1 => CONC 4	60	0	4	0	8
C36	USINE 2 => CONC 1	20	0	8	0	0
D36	USINE 2 => CONC 2	0	0	6	1E+30	0
E36	USINE 2 => CONC 3	9,23691E-10	0	10	0	0
F36	USINE 2 => CONC 4	0	0	8	1E+30	0
C37	USINE 3 => CONC 1	0	0	6	1E+30	0
D37	USINE 3 => CONC 2	75	0	4	0	6
E37	USINE 3 => CONC 3	25	0	8	0	0
F37	USINE 3 => CONC 4	0	0	6	1E+30	0

Contraintes

Cellule	Nom	Finale Valeur	Ombre Coût	Contrainte à droite	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
C47	CONTRAINTE DISP U1	80	-4	80	20	20
D47	CONTRAINTE DISP U2	20	0	40	1E+30	20
I47	CONTRAINTE DEMANDE 4	60	8	60	20	20
F47	CONTRAINTE DEMANDE 1	40	8	40	20	20
G47	CONTRAINTE DEMANDE 2	75	6	75	20	0
H47	CONTRAINTE DEMANDE 3	25	10	25	20	0
E47	CONTRAINTE DISP U3	100	-2	100	0	20

Solution optimale du dual (-4,0,8,8,6,10,-2). On peut augmenter la disponibilité de l'usine 2 jusqu'à l'infini (1×10^{30}) mais comme la solution optimale du dual est 0 pour la variable y_2 associée alors cela n'a aucun effet sur la fonction objectif.

Si le garage 2 ne veut que 70 véhicule cela veut dire que la demande est réduite de 5 mais pour le plan de livraison cela n'est pas admissible pour rester dans le cadre d'une solution optimale.

On ne peut dire l'effet d'une augmentation de 10 pour tous les garages selon la sortie du solveur mais on peut déduire qu'il y aura une demande de 230 automobiles et que les usines ne peuvent en fournir que 220 ce qui est impossible.

(12)PROBLÈME : Un laboratoire conduit des tests sur la composition des sols. Il peut traiter jusqu'à 1200 échantillons de sol par jour. Il a un contrat avec la coopérative agricole régionale pour le traitement quotidien de 400 échantillons. Le laboratoire traite également des échantillons de sols de jardins privés et de parcs municipaux. Les profits réalisés sont 0,18$ par échantillon en provenance de la coopérative agricole, 0,23$ par échantillon de jardins privés et 0,21$ par échantillon de parcs municipaux. Ce laboratoire ne dispose que de 1400 unités de temps de traitement par jour. Les échantillons de la coopérative agricole nécessitent deux fois plus de temps que ceux des parcs municipaux, qui eux prennent une unité de temps de traitement. Les échantillons des jardins privés nécessitent 1,5 unité de temps de traitement. Le laboratoire doit se maintenir dans les bonnes grâces du conseil municipal et, par conséquent, ne peut pas traiter plus d'échantillons de jardins privés que d'échantillons de parcs municipaux. On veut maximiser les profits.

Devrait-on modifier le contrat avec la coopérative agricole ?

SOLUTION PAR LE SOLVEUR :

Cellules variables

Cellule	Nom	Finale Valeur	Réduit Coût	Objectif Coefficient	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
B8	Coopérative	400	0	0,18	0,24	1E+30
C8	Jardins	0	-0,085	0,23	0,085	1E+30
D8	Parcs	600	0	0,21	1E+30	0,056666667

Contraintes

Cellule	Nom	Finale Valeur	Ombre Coût	Contrainte à droite	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
B14	Capacité	1000	0	1200	1E+30	200
C14	Coopérative	400	-0,24	400	300	200
D14	Temps	1400	0,21	1400	200	600
E14	Rapport	-600	0	0	1E+30	600

Il est possible de modifier le contrat en acceptant de faire 200 analyses de moins pour la coopérative et ainsi gagner $200 * 0.25 = 50.0\$$ de plus.